This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

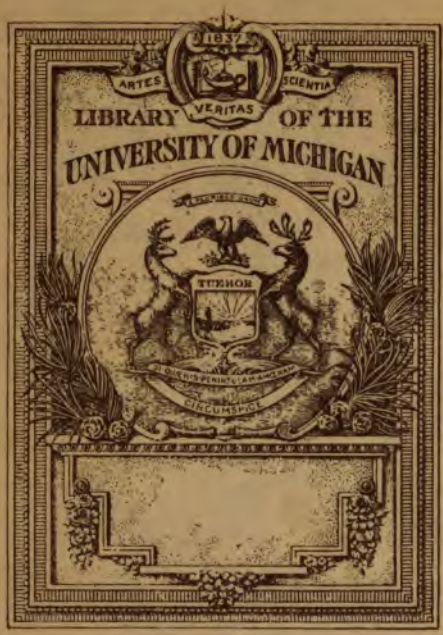
+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

Mathematics
QA
1
.W8
A4

VERZAMELING

VAN

WISKUNDIGE VOORSTELLEN,

DOOR DE

LEDEN

VAN HET

WISKUNDIGE GENOOTSCHAP,

ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

ELKANDER TOT ONDERLINGE OEFENING OPGEGEVEN.

VIERDE DEEL.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)

Te AMSTERDAM, bij

H. WELTING, Boekverkooper, op den Nieuwendijk, bij den Dam, N°. 245.

1830.

Gedrukt ter Boekdrukkerij van P. E. BRIËT te Amsterdam.

Geene Exemplaren worden voor echt erkend, dan die, welke aldus, volgens de Wet, onderteekend zijn, door

Tweede Secretaris.

Van de vroegere Deelen dezer Verzameling van Wiskundige Voorstellen, zijn complete Exemplaren of afzonderlijke Stukjes, om te completeren, te bekomen, bij den Heer H. WEIJTING, Boekhouder en tevens Uitgever van de Werken des Genootschaps.

NAAMLIJST

DER

LEDEN

VAN HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

Onder de Zinſpreuk:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

Te Amſterdam.

Gerangſchikt naar den tijd van hun Lidmaatſchap,
A°. MDCCCXXVII.

BESTUURDERS.

H. VAN WESSEM, JACOBUSZ.
P. PREIJER.
J. C. VAN SETTEN.
C. F. JULIUS.
A. VAN DER SWAN.
J. VAN DER LINDEN.
} *te Amſterdam.*

J. P. DELPRAT, eerſte Kapitein-Ingenieur, Adjunct aan de Koninklijke Artillerie- en Genie-School te Delft, Lid van het Provinciale Utrechtſche Genootſchap van Kunsten en Wetenſchappen, 1° Secretaris, *te Delft.*

H. G. WITLAGE, JR. 2° Secretaris, *te Amſterdam.*

H. WEIJTING, Boekhouder, *te Amſterdam.*

370504

Buitengewone Leden van Verdienſten in het Wetenſchappelijke Vak.

U. HUGUENIN, Ridder van de Orde van den Nederlandſchen Leeuw, Generaal-Majoor, Directeur van de Koninklijke IJzer-Geſchutgieterij, te Luik.

Zijne Excelentie de Luitenant-Generaal C. R. T. Baron KRAYENHOFF, Groot-Kruis der Militaire Willems-orde, Lid van het Koninklijk-Nederlandſche Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, te Nijmegen.

J. H. VOET, Ridder van de Militaire Willems-orde, 3de klaſſe, Luitenant-Generaal, Commandant en Directeur der Studiën aan de Koninklijke Artillerie- en Genie-School te Delft.

Jonkheer J. M. C. VAN UTENHOVE, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, te Jutphaas.

A. VAN DEN ENDE, Ridder van de Orde van den Nederlandſchen Leeuw; Hoofd Inſpecteur van het Middelbaar en Lager Onderwijs; Lid van het Koninklijk-Nederlandſche Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, te Haarlem.

O. S. BANGMA, Examinator der Stuurlieden, te Amſterdam, Lid van het Koninklijk-Nederlandſche Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, enz. enz.

JACOB DE GELDER, Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor, Hoogleeraar, in de Wis- en Natuurkundige Faculteit, aan 's Rijks Hoogeſchool te Leijden; Lid Conſultant van het Bataafſche Genootſchap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte, te Rotterdam.

Buitengewone Leden van Verdienſten in het Huishoudelijke Vak.

CHRISTOFFER MEIJLINK, te Voorburg bij 's Gravenhage.

H. VAN WESSEM JACOBUSZ., te Amſterdam.

B. VAN HEIJNINGEN, te Amſterdam.

C. TERMARS, te Amſterdam.

Leden van de Wetenſchappelijke Commiſſie.

O. S. BANGMA: (zie boven.)

J.

J. DE GELDER. (zie boven.)
J. H. VOET. (zie boven.)
U. HUGUENIN. (zie boven.)
J. P. DELPRAT, eerſte Kapitein-Ingenieur, te Delft. (zie boven.)

Bibliothecaris.

J. VAN DER LINDEN. (zie boven.)

Leden van Verdienſten der Tweede Klaſſe.

A. L. HECTOR, te Middelburg.
A. FOCK, te Amſterdam.
P. VAN EEGHEN, Chz., te Amſterdam.
R. LOBATTO, te 's Gravenhage.
F. J. STAMKART, Onderwijzer in de Wis- en Zeevaartkunde, te Antwerpen.
R. VAN WIJK JACOBUSZ., te Hattem.
W. TOP Wz., te Zierikzee.
A. B. DE BOCK JUNIOR, Adjunct-IJker van het diſtrict Nieuwer-Amſtel, beëedigd Landmeter en Onderwijzer in de Wiskunde, te Amſterdam.
J. BASSAN, te Amſterdam.

Correspondenten.

A. HARREBOMÉE, te Heemſtede.
C. MEIJLINK, te Voorburg.
J. ARBON, te Rotterdam.
R. VAN WIJK JACOBSZ., te Hattem.
A. L. HECTOR, te Middelburg.
S. KLIJNSMA, te Maaſtricht.

Gewone Leden.

P. HOUTTUIN Gz., te Hoorn.
L. KOOPS, te Hilverſum.
W. C. BAKKER, te Ilpendam.

KLAAS SMIT, te Amſterdam.
A. VOLKERSE, te Monnikendam.
A. HARREBOMÉE, te Heemſtede.
A. HORSTMAN, te Amſterdam.
W. J. VAN HEMERT, te Utrecht.
J. H. NIEUWVEEN, Stads Kost- en Dag-Schoolhouder te Leijden.
J. BUIJS, Oud-Lector in de Natuurkunde bij de Maatſchappij *Felix Meritis*, te Amſterdam.
G. MOLL, Ridder van de Orde van den Nederlandſchen Leeuw; Lid van het Koninklijk Nederlandſche-Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz. enz.; Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkundige Wetenſchappen, aan de Hoogeſchool, te Utrecht.
H. G. WITLAGE, JUNIOR, ne Secretaris, te Amſterdam.
A. L. HECTOR, te Middelburg.
J. C. VAN SETTEN, Beſtuurder, te Amſterdam.
A. VAN DER SWAN, Beſtuurder, te Amſterdam.
L. VAN HEUSDEN, aan den Uithoorn.
D. H. WATERMAN, te Berkel.
M. LEMANS, te Amſterdam.
P. VAN EEGHEN CHZ., te Amſterdam.
A. VAN DER SPUIJ, te 's Gravenhage.
J. P. BAUDET, te Vaasſen.
C. LANTZ, te Amſterdam.
R. LOBATTO, te 's Gravenhage.
J. DEELEMAN, te Amſterdam.
A. F. DE PAUW, te Amſterdam.
S. J. MULDER, te Amſterdam.
G. S. LEENEMAN, te Amſterdam.
A. W. HUIDEKOPER, te Amſterdam.
A. TOLLUS, Architect en Landmeter te 's Gravenhage.
G. E. BOSWEL, te Amſterdam.
H. F. FIJNJE, Adſpirant bij den Waterſtaat en der Publicke werken, te Groningen.
J. VAN DER LINDEN, Beſtuurder en Bibliothecaris des Genootſchaps, te Amſterdam.
J. ARBON, Examinator der Stuurlieden, te Rotterdam.

P.

P. PREIJER, Beſtuurder, te Amſterdam.

C. I. GLAVIMANS, Onder Conſtructeur bij het Departement der Marine van de Maze, te Rotterdam.

H. P. KRETSCHMER, Directeur van het Wis- en Aardrijkskundig Inſtituut, te Zutphen.

J. C. BEIJER, Hoogleeraar voor de Nederduitſche Taal en Rekenkunde aan de Koninklijke Artillerie- en Genie-School, te Delft,

J. M. PAUW, 1e Luitenant-Ingenieur, aan den Helder.

J. VAN WIJK ROELDZ., te Hattem.

C. J. BOLTEN, Adſpirant bij den Waterſtaat en der Publieke werken, te Vianen.

F. P. GISIUS NANNING, 2e Luitenant-Ingenieur, Aide voor de Genie aan de Koninklijke Artillerie- en Genie-School, te Delft.

F. BAUD, Ingenieur van de Eerſte Klaſſe Aide voor den Waterſtaat en de Publieke werken aan de Koninklijke Artillerie- en Genie-School, te Delft.

J. E. DUIJVENÉ, 1e Luitenant-Ingenieur, te Gent.

W. HORA SICCAMA, 1e Luitenant ter Zee en Ridder van de Militaire Willems Orde, 4e klaſſe, te Groningen.

R. VAN WIJK JACOBUSZ., te Hattem.

P. J. PRINSEN, Directeur en Onderwijzer aan de Koninklijke Kweekſchool voor Onderwijzers, te Haarlem.

S. KLIJNSMA, Kapitein Ingenieur, te Maastricht.

J. NICOLAIJ, Majoor der Artillerie, Onder-Directeur bij de Koninklijke IJzer-Geſchutgieterij, te Luik.

M. B. JUNG, Onderwijzer, te Middelburg.

C. J. DE JONG, te Arnhem.

A. C. PIERSON, 2e Luitenant Ingenieur, te Willemſtad.

J. W. MARTINI, te 's Hertogenbosch.

J. VAN DER STOK, 2e Luitenant Ingenieur, te Curaçao.

J. P. DELPRAT, 1e Secretaris, te Delft. (zie boven.)

W. TOP Wz., Onderwijzer, te Zierikzee.

C. F. JULIUS, Beſtuurder, te Amſterdam.

E. G. STAAL, te Zwol.

G. A. VAN KERKWIJK, 1e Luitenant Ingenieur, Aide voor de Genie aan de Koninklijke Artillerie- en Genie School te Delft.

C. F. E. VAN INGEN, 2e Luitenant Ingénieur, te Antwerpen.
J. KOOPS, te Amsterdam.
G. BRANDSTEDER, te Middelburg.
F. MOLENBROEK, te Amsterdam.
C. VAN HEIJNSBERGEN, Art. Lib. Mag. Ph. et Med. Doctor en Professor voor de Wiskunde aan de Koninklijke Artillerie- en Genie-School, te Delft.
L. RIJSTERBORGH, Adspirant bij den Waterstaat en der Publieke werken, te 's Hertogenbosch.
P. TEGRINWIS, fungerend Hoofd-Ingenieur voor den Waterstaat in de provincie Drenthe, te Assen.
J. CARSTEN, 1e Luitenant Ingenieur, te Delfzijl.
P. DE PEREZ, Adelborst der 1e Klasse bij de Koninklijke Marine.
H. WEIJTING, Boekhouder des Genootschaps, te Amsterdam.
L. LUBBERS, te Elburg.
J. BASSAN, te Amsterdam.
J. KÖHLER, te Amsterdam.
A. B. DE BOCK JUNIOR, te Amsterdam.
J. B. VOLMER VAN BORN, te Leijden.
A. E. TROMP, Onder-Constructeur bij het Departement der Marine van de Schelde, te Vlissingen.
J. ACQUOY, te Amsterdam.
W. N. ROSE, 2e Luitenant Ingenieur; te Delft.
F. P. MASCHECK, 2e Luitenant Ingenieur, te Gent.
H. STROOTMAN, Onderwijzer, te Bergen-op-Zoom.
F. J. STAMKART, te Antwerpen.
J. JONKHERT, te Amsterdam.
A. VAN DER LEE, te Amsterdam.
J. LAGERWEIJ, Kostschoolhouder te Geertruidenberg.
A. J. G. VERMIJLEN, 2e Luitenant-Adjudant, te Delft.
A. E. ANDRÉ DE LA PORTE, 2e Luitenant Ingenieur, te Namen.
A. R. T. DU BOSCH, 2e Luitenant Ingenieur, te Ostende.
F. J. EIJCKHOLT, 2e Luitenant-Ingenieur, te Dendermonde.
P. H. VAN DER MEULEN, Luitenant der Artillerie, te IJperen.
J. VORSTENBOSCH, 1e Luitenant bij de 12de Afdeeling Infanterie, te Namen.

P.

P. MATTYSSEN, te Amſterdam.
R. VAN REES, Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkundige Wetenſchappen aan 's Rijks Hoogeſchool, te Luik.
G. RAMAKERS, Jr., te Amſterdam.
P. DOORMAN, 1e Luitenant der Artillerie, te Maastricht.
J. DOORMAN, 1e Luitenant der Artillerie, te Delft.
F. KAISER, te Leijden.
N. J. SINGELS, te Alphen.
L. SIMONS, Onderwijzer in de Ned. en Franſche Talen bij de Kostſchool in het Athenaeum, te Maastricht.
C. J. VAN BRUSSEL, te Amſterdam.
N. CORNET, Onderwijzer, te Schellingwoude.
G. H. MAASSEN, te Amſterdam.
P. HUIDEKOPER, te Amſterdam.
J. W. WINTER MOMMA, Kadet te Delft.
G. GRAAFLAND, te 's Gravenhage.
H. RETEL, Onderwijzer, te Overveen.
J. BANNENBERG, te Amſterdam.
W. JULIUS, Onderwijzer te Antwerpen.
B. FROMINK, te Amſterdam.
B. G. VAN KELL, te Amſterdam.
L. F. BEAULIEU, 1e Luitenant Ingenieur, te Nieuwpoort.
E. OLIVIER, te Dordrecht.
J. H. A. WEIJTINGH, Litt. Hum. Doctor en Conrector der Latijnſche Scholen, te Harlingen.
W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, te Amſterdam.
H. J. LORENZ, Adſpirant Ingenieur bij den Waterſtaat te Haarlem.

WISKUNDIGE VOORSTELLEN

MET DERZELVER

ONTBINDINGEN.

I. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Om eene ellips wordt een parallelogram beſchreven, en door het middelpunt alsmede door twee der punten, alwaar de diagonalen van het parallelogram den omtrek der ellips ſnijden, wederom eene ellips beſchreven, gelijkvormig aan de eerſte; men vraagt den inhoud te vinden der kromlijnige figuren, welke door de ſnijding der ellipſen ontſtaan?

OPGELOST *door* J. JONKHERT *en* A. B. DE BOCK, JUN.,

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Zij ABCD (*Fig.* 1) de gegevene ellips, waarom het parallelogram KLMN is beſchreven, en laten de lijnen KM en NL alsmede CD en AB evenwijdig aan KL en NK getrokken zijn. De lijnen CD en AB toegevoegde middellijnen der ellips zijnde, zoo zullen de toegevoegde middellijnen der gelijkvormige ellips door E, G en H gaande, den zelfden hoek BED met elkander moeten maken, en daarenboven evenredig aan deze middellijnen moeten zijn. Trekt men nu GH, dan verdeelt EB deze lijn in I in twee gelijke deelen, en verder is EI : IH = EB : BL = EB : ED; maakt men dus IF = IE, dan zullen GH en EF de toegevoegde middellijnen der gelijkvormige ellips voorſtellen, dewijl ook hoek FIH = BED is.

Nu ſtaan de inhouden van gelijkvormige ellipſen tot elkander als de vierkanten der eveneens geplaatſte lijnen, derhalve *Inh. ellips* ADBC : *Inh. ellips* GEHF = $ED^2 : IH^2$. Maar door de eigenſchap der toegevoegde middellijnen is

$$HP^2 = \frac{BE^2}{ED^2}(ED^2 - EP^2),$$

en dus

$$\frac{HP^2}{EP^2} = \frac{BE^2}{ED^2}\left(\frac{ED^2}{EP^2} - 1\right).$$

Maar nu is $\frac{HP}{EP^2} = \frac{LD^2}{ED^2} = \frac{BE^2}{ED^2}$,

dus $\frac{ED^2}{EP^2} = 2$,

of $ED^2 = 2\,EP^2 = 2\,IH^2$,

waaruit volgt *Inh. ellips* ACBD $=$ 2 *Inh. ellips* EGFH.

Omdat nu verder de toegevoegde middellijnen, de ellips in vier sectoren verdeelen, wier inhoud onderling gelijk is; zoo is ook

Inh. sect. EGBHE $= \frac{1}{4}$ *Inh. ellips* ACBD $= \frac{1}{2}$ *Inh. ellips* EGFH,

$=$ GVFWHG,

hiervan af *Inh.* IGBHI $=$ *Inh.* IGBHI,

zoo komt er *Inh. drieh.* GEH $=$ *Inh.* GVFWHBG,

$= \frac{1}{2}$ *Inh. parall.* GHPQ.

De inhoud van het figuur GVFWHG is dus ook gelijk aan de helft van den regthoek op de beide halve asſen der ellips ABD, dewijl de regthoek op deze asſen gelijk is aan het parallelogram op de toegevoegde middellijnen.

Nu is ook nog

Inh. ellips EGFH $=$ *Inh.* CGBHD,

hiervan af GUETHBG $=$ GUETHBG,

blijft er *Inh.* GVFWHBG $=$ CEUGC $+$ EDHTE,

en daar beide laatſte ſtukken aan elkander gelijk zijn, zoo is elk derzelve gelijk aan een vierde van den regthoek op de beide halve asſen der oorſpronkelijke ellips.

II. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Een cirkel wordt zoodanig bewogen, dat deszelfs vlak loodregt ſtaat op de logarithmiſche ſpiraal, welke door het middelpunt des cirkels gaat. Als nu de ſtraal van dezen cirkel altijd midden evenredig blijft tuſſchen den doorgeloopen' boog en den coſinus van den hoek, welke de raaklijn van de ſpiraal in elken ſtand des cirkels met de poluire ordinaat maakt, zoo vraagt men, den inhoud van het aldus voortgebragte ligchaam te bepalen?

OPGELOST *door* J. DOORMAN, A. B. DE BOCK; JUN. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. DOORMAN.

Laat QMP (*Fig.* 2) de logarithmiſche ſpiraal zijn, waarin O de oorſprong der voerſtralen en OA die der hoeken is. Elke lo-

logarithmiſche ſpiraal de eigenſchap hebbende, dat de hoek van de raaklijn met den voerſtraal van het raakpunt ſtandvastig is (I. R. SCHMIDT, *Beg. der Diff. en Int. rekening*, bladz. 232) zoo is ook de cosinus van dezen hoek ſtandvastig; de ſtraal DM van den bewegenden cirkel is dus midden evenredig tusſchen den cosinus van den ſtandvastigen hoek OMT en den boog der ſpiraal. Zij dan de vergelijking der ſpiraal $z = a^{\Phi}$ en hoek $OMT = \alpha$, dan is de boog $s = a^{\Phi} Sec.\, \alpha$.

en $Cot.\, \alpha = Nep.log.\, \alpha$, (I. R. SCHMIDT, *Dif. en Int. rekening*, § 272 en § 164.)

de ſtraal $r = CM$ van den bewegenden cirkel is dus

$$r = V(Cos.\, \alpha . a^{\Phi} Sec.\, \alpha) = V a^{\Phi},$$

alsmede zijn inhoud

$$\pi r^2 = \pi a^{\Phi}.$$

Voor de differentiaal ∂I van den inhoud des voorgebragten ligchaams vinden wij dan

$$\begin{aligned} \partial I &= \pi a^{\Phi} \partial s \\ &= \pi a^{\Phi} . Sec.\, \alpha . a^{\Phi} Log.\, a . \partial \Phi \\ &= \pi Sec.\, \alpha . Log.\, a\, a^{2\Phi} \partial \Phi, \end{aligned}$$

waarvan de integraal is

$$I = \tfrac{1}{2} \pi Sec.\, \alpha\, a^{2\Phi} + C.$$

Indien men nu den inhoud wil rekenen van het punt der ſpiraal, hetwelk in O gelegen is, dan moet $\Phi = -\infty$ genomen worden, en er behoeft alsdan geene ſtandvastige bij de integraal gevoegd te worden, of $C = 0$ en daar ook $z = a^{\Phi}$ is, zoo hebben wij eindelijk voor den inhoud

$$I = \tfrac{1}{2} \pi z^2 Sec.\, \alpha = \tfrac{1}{2} \pi z^2 \frac{V(1 + Log^2 . \alpha)}{Log.\, a}.$$

Trekt men ON loodregt op OP, dan is $PN = z Sec.\, \alpha$, derhalve is de inhoud van het gezochte ligchaam gelijk aan die van den cilinder, welke PN tot ſtraal en $\tfrac{1}{2} Cos.\, \alpha$ tot hoogte heeft.

III. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

De jaren van iemands ouderdom met 2 vermenigvuldigd, geven een' pronik; doch de cijfers van het aantal jaren omgezet en het komende getal door 3 gedeeld, vormen een driehoekig getal. De ſom van dezen pronik en van dit driehoekig getal is 93, en het verſchil derzelver wortels 2; zijnde de pronik de grootſte. Men vraagt naar deze jaren?

OPGELOST *door* A. VAN DER SWAN, A. B. DE BOCK, JUN., J. BASSAN, J. JONKHERT, H. STROOTMAN *en* G. GRAAFLAND.

OPLOSSING *van* A. VAN DER SWAN.

Stel den wortel van het driehoekig getal $= x$, dan is dat der proniks $x+2$, en volgens de voorwaarde des vraagſtuks hebben wij

$$(x+2)^2+x+2+\frac{x(x+1)}{2}=93,$$

of $\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{2}x+6=93,$

of $x^2+\frac{11}{3}x=58,$

en dus $x=-\frac{11}{6}\pm\sqrt{(\frac{121}{36}+58)}=-\frac{11}{6}\pm\frac{47}{6},$

dus $x=6$ of $x=-9\frac{2}{3}.$

Het driehoekig getal is dus 21, wanneer men den wortel in geheele getallen gebruikt; $21\times 3=63$ zijnde, zoo is de gevraagde ouderdom 36 jaren.

IV. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Men vraagt twee getallen, waarvan het vermenigvuldigde gefteld bij derzelver ſom is 179, en de ſom der vierkanten min de ſom der getallen $=344$?

OPGELOST *door* A. VAN DER SWAN, J. DOORMAN, G. GRAAFLAND, J. JONKHERT, H. STROOTMAN, J. BASSAN *en* A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* A. VAN DER SWAN.

Wanneer de gevraagde getallen door x en y worden voorgefteld, zoo heeft men volgens de voorwaarden van het voorſtel

$$x^2+y^2-(x+y)=344,$$

en $x+y+xy=179.$

Bij de eerſte het dubbeld der laatſte tellende, zoo komt er

$(x+y)^2$

$$(x+y)^2+(x+y)=702.$$

In deze vergelijking $x+y$ als onbekende beſchouwende, zoo komt er

$$x+y=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{(702+\tfrac{1}{4})}=-\tfrac{1}{2}\pm 26\tfrac{1}{2}$$
$$=26 \text{ of } -27.$$

Indien men in de tweede vergelijking voor $x+y$ zijne waarden ſchrijft, dan vindt men

$$xy=179-26=153,$$

of

$$xy=179+27=206.$$

Bij de eerſte dezer vergelijkingen behoort $x+y=26$, en bij de laatſte $x+y=-27$.

Uit het eerſte ſtelſel hebben wij

$$(x+y)^2=26^2=676,$$

waarvan het viervoud van $xy=153$ afgetrokken geeft

$$(x-y)^2=64,$$

of

$$x-y=\pm 8,$$

hetwelk verbonden met $x+y=26$, geeft

$$x=17 \text{ en } y=9 \text{ of } x=9 \text{ en } y=17.$$

Uit de vergelijkingen $xy=206$ en $x+y=-27$ vindt men, door de tweede in het vierkant te brengen, en er het viervoud der eerſte af te trekken,

$$(x-y)^2=-95,$$

welke vergelijking voor $x-y$ eene imaginaire waarde gevende, het blijkt, dat de getallen 9 en 17 de eenigſte zijn, welke aan de vraag voldoen.

V. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE, JUN.

Om eenen cilinder van 13 *palmen middellijn, wordt een' ijzerdraad in den vorm eener ſchroeflijn gewonden, elke omwenteling op* 3 *duimen afſtand van den anderen, op het midden van den draad gemeten; men vraagt de lengte van den draad voor elke geheele omwenteling?*

OPGELOST *door* H. STROOTMAN, A. B. DE BOCK, JUN. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* H. STROOTMAN.

Daar bij elke geheele omwenteling van eenen ſchroefdraad de lengte van den draad gelijk is aan de ſchuinſe zijde van eenen regthoekigen

driehoek, die den omtrek des cilinders en den afstand der omwentelingen tot regthoekzijden heeft, zoo is de lengte van elke omwenteling

$$= \sqrt{(13^2\pi^2 + 9{,}3^2)}$$
$$= 4{,}0841 \text{ ellen.}$$

VI. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JUN.

Om eenen regtopstaanden kegel van 13 *duimen hoogte gaat een draad in den vorm eener schroeflijn van den voet naar den top in* 30 *omwentelingen, op eenen afstand van* 3 *duimen van elkander; men vraagt naar de lengte van deze lijn?*

OPGELOST *door* J. P. DELPRAT.

Laat CADB (*Fig.* 3) den regten cirkelvormigen kegel voorstellen, waarom de draad ARSU is gewonden, dan volgt uit het opgegevene in het voorstel, dat wanneer men op den kegel de lijnen AB, BP, BQ *enz.* trekt, de stukken AS, VM, UR *enz.* dezer lijnen, begrepen tusschen den omgewondenen draad, alle even groot zijn. Verder, wanneer de afstand AS, welke eene geheele wending van den draad ARS beslaat, bekend is (dewijl de afstanden MP, NQ, RD evenredig zijn aan de hoeken AOP, AOQ, AOD *enz.*) zal men hebben, stellende AS $= b$ en AOP $= \phi$

$$MP : AS = \phi : 2\pi,$$

of

$$MP = b\frac{\phi}{2\pi}.$$

Deze zelfde betrekking zal voor elk punt der kromme ARSU plaats hebben, dewijl alle de volgende omwentelingen evenwijdig aan de eerste zijn. Stellen wij dan OA $= r$, BC $= a$ en PM $= v$; laat verder Mp de doorsnede zijn van een cirkelvlak, evenwijdig aan de bazis CAD, N een punt zeer nabij M, laat de lijn BNQ getrokken worden, en stelt de lengte van den boog AM $= s$ dan is MN $= \partial s$, POQ $= \partial\phi$, Np $= \partial v$ en in het regthoekige driehoekje MpN is

$$MN = \partial s = \sqrt{\{\overline{Mp}^2 + \overline{pN}^2\}}.$$

Verder is

$$Mp : PQ = BM : BP = a - v : a,$$

en

$$PQ = r\partial\phi,$$

dus

dus $$Mp = \frac{a-y}{a} r\partial\phi,$$

derhalve $$\partial s = V\left\{\left(\frac{a-y}{a} r\right)^2 \partial\phi^2 + \partial y^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha).$$

Maar wij hebben gevonden

$$MP = y = \frac{b}{2\pi}\phi,$$

waaruit volgt $$\partial y = \frac{b}{2\pi}\partial\phi.$$

Dit in (α) gesteld, geeft

$$\partial s = \partial y V\left\{\left(\frac{a-y}{a} r\right)^2 \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 + 1\right\}$$

$$= \frac{2\pi r}{ab}\partial y V\left\{(a-y)^2 + \left(\frac{ab}{2\pi r}\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Stelt men nu $a-y = z$, dan wordt

$$\partial s = -\frac{2\pi r}{ab}\partial z V\left(z^2 + \left(\frac{ab}{2\pi r}\right)^2\right),$$

waarvan de integraal is (I. R. Schmidt, *Diff. en Integ. rekening*, § 189)

$$s = C - \frac{2\pi r}{ab} \times \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\left\{\tfrac{1}{2} z V\left\{z^2 + \left(\frac{ab}{2\pi r}\right)^2\right\} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{ab}{2\pi r}\right)^2 Log. \frac{z + V\left(z^2 + \left(\frac{ab}{2\pi r}\right)^2\right)}{\frac{ab}{2\pi r}}\right\} \quad . \quad (\gamma).$$

Om de lengte van den boog te vinden van A tot B, zoo moet deze vergelijking tusschen de grenzen van $y = o$ tot $y = a$ genomen worden, dat is van $z = a$ tot $z = o$. Voor $z = o$ verdwijnt het veranderlijk gedeelte der vergelijking (γ), zoodat wij voor deze geheele lengte vinden

$$S = C = \frac{2\pi r}{ab}\left\{\tfrac{1}{2} a^2 V\left\{1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2\right\} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{ab}{2\pi r}\right)^2 Log. \frac{2\pi r + V(4\pi^2 r^2 + b^2)}{b}\right\}$$

$$= \frac{a}{b} V(4\pi^2 r^2 + b^2) + \frac{ab}{\pi r} Log. \frac{2\pi r + V(4\pi^2 r^2 + b^2)}{b} \quad . \quad . \quad (\delta).$$

Volgens het voorstel moeten er 30 omwentelingen, ieder 3 duim van elkander, op den kegel plaats hebben; de schuinsche

zijde des kegels is dus $a = 90$ duim lang, en daar de hoogte des kegels 13 duimen bedraagt, zoo vindt men den straal r van het grondvlak

$$r = \sqrt{(8100 - 169)} = 0{,}8901 \text{ el.}$$

Nemende dus in (3) $a = 0{,}9$, $b = 0{,}03$ en $r = 0{,}8901$, dan zal men vinden

$$S = 168{,}22 \text{ el nagenoeg.}$$

VII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE, JUN.

Twee evenwijdige muren moeten door eene goot worden verbonden. Men vraagt naar de lengte van deze laatste, indien zij zoo geplaatst wordt, dat een zwaar ligchaam dezelve in den kortsten tijd doorloopt?

OPGELOST *door* J. DOORMAN, J. BASSAN *en* A. B. DE BOCK, JUN.

I OPLOSSING *van* J. DOORMAN.

Het voorstel niets bepalende omtrent den loop der bovenzijde van de muren, zoo zullen wij dezelve overal even hoog onderstellen. Indien dan ABCD en DEFG (*Fig.* 4) deze muren voorstellen, dan zal de lengte van de goot HI bepaald zijn, zoodra men den hoek LKM $= \psi$ zal kennen, welke het verticale vlak, waarin deze goot is gelegen, met een ander verticaal vlak loodregt op de muren vormt. Stelt men nu den afstand KM der muren $= a$, hun verschil in hoogte HO $= b$, hoek LKM $= \psi$, hoek HIO $= \phi$ en HI $= x$. Dan zal men den tijd t tot het vallen langs HI uit de bekende formule

$$x = g t^2 \, Sin. \phi$$

vinden, waarin g de lengte voorstelt, waardoor een vrijvallend ligchaam in de eerste secunde valt.

Maar nu is $x = OI \, . \, Sec. HIO = OI \, . \, Sec. \phi$,

en $OI = KL = KM \, . \, Sec. \psi = a \, Sec. \psi$

zijnde, zoo is $x = a \, . \, Sec. \psi \; Sec. \phi$,

derhalve $g t^2 = a \, Sec. \psi \; Sec. \phi \; Cosec. \phi$,

$$= \frac{a}{Cos. \psi \, Sin. \phi \, Cos. \phi}$$

$$= \frac{a}{Cos. \psi \, Cos^2. \phi \, Tang. \phi} = \frac{a (1 + Tang^2. \phi)}{Cos. \psi \, Tang. \phi}.$$

Ver-

Verder is $Tang.\varphi = \frac{HO}{OI} = \frac{b}{a\ Sec.\psi}$,

en dit in de voorgaande vergelijking gesteld, geeft

$$gt^2 = \frac{a\left(1+\frac{b^2\ Cos^2.\psi}{a^2}\right)}{Cos.\psi.\frac{b}{a}\ Cos.\psi}$$

$$= \frac{a^2+b^2\ Cos^2.\psi}{a\,b\ Cos^2.\psi}.$$

Zal nu t een minimum zijn, dan moet gt^2 dit ook wezen; en wij hebben daartoe volgens de bekende regels

$$\frac{\partial\ gt^2}{\partial\varphi} = o = \frac{-2ab^3 Cos^2.\psi.Cos.\psi Sin.\psi + 2ab(a^2+b^2 Cos^2.\psi)\ Cos.\psi\ Sin.\psi}{a^2\ b^2\ Cos^4\psi}$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door

$$Cos.\psi = o, \quad Sin.\psi = o \quad \text{en} \quad 2a^3 b = o.$$

De laatste vergelijking onbestaanbaar zijnde, zoo bepalen wij ons bij de beide eerste. $Cos.\psi = o$ geeft $\psi = 90°$, de goot valt dan in het vlak van den eenen muur, en kan alzoo nooit den tweeden bereiken; deze waarde beantwoordt alzoo aan een maximum. $Sin.\psi = o$ geeft $\psi = o$, en in dat geval loopt de goot volgens den kortsten weg van den eenen muur naar den anderen.

II Oplossing *van* J. Bassan.

Wij *onderstellen de beide muren overal even hoog te zijn; doch daar het voorstel niet bepaalt, dat de goot in eene regte lijn moet loopen, zoo is het klaar, dat men, om in den kortsten tijd van den eenen muur een ligchaam naar den anderen te doen vallen, eenen boog der cycloïde moet nemen, gelegen in het verticale vlak loodregt door de muren gaande* (I. R. Schmidt, *Dynamica*, § 124).

De gevraagde cycloïde zal gevonden zijn zoodra de makende cirkel bekend is; laat dan (*Fig.* 5) BCG de cycloïde voorstellen, AB en CD de beide muren, waarbij DA $= a$ en het verschil in hoogte AB — CD $= b$ gegeven is; verder nemen wij PM $= y$ en MP $= x$, dan is de vergelijking der cycloïde (I. R. Schmidt, *Dif. en Int. rekening*, § 119)

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)} + r\ Boog.\ Sin.\ vers.\frac{x}{r}.$$

indien z een geheel getal zal wezen; nemende dus $2p-1=11$ of $p=6$, dan vindt men

$$z=28,\quad y=39 \text{ en } x=50.$$

Zoodat de gevraagde getallen worden 350, 351 en 352.

Door $2p-1$ gelijk aan eenig veelvoud van 11 te ſtellen, kan men nog vele andere getallen vinden, die aan de geſtelde voorwaarden voldoen.

X. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert eenen driehoek te berekenen en te conſtrueren, wanneer bekend zijn de drie ſtukken, waarin de loodlijn, uit den tophoek op de bazis nedergelaten, verdeeld wordt, door de lijnen uit het midden der hoeken aan de bazis getrokken?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. JONKHERT, J. DOORMAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC (*Fig.* 6) de driehoek, waarin BD de loodlijn en CE en AF de lijnen, die de hoeken C en A midden door deelen, voorſtellen; en nemen wij de bekende ſtukken $DE=a$, $EF=b$ en $FB=c$, dan hebben wij, volgens eene bekende eigenſchap, in den driehoek ADB,

$$AD:AB=DF:FB=a+b:c;$$

wij mogen dan ſtellen $AD=(a+b)x$ en $AB=cx$, en dan volgt uit den regthoekigen driehoek ADB

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2,$$

of $$c^2x^2=(a+b)^2x^2+(a+b+c)^2,$$

waaruit men vindt $$x=\frac{a+b+c}{\sqrt{(c^2+(a+b)^2)}};$$

derhalve $$AB=cx=\frac{c(a+b+c)}{\sqrt{(c^2+(a+b)^2)}},$$

en $$AD=\frac{(a+b+c)(a+b)}{\sqrt{(c^2+(a+b)^2)}}.$$

Op dezelfde wijze vindt men uit den driehoek BCD

$$BC=\frac{(c+b)(a+b+c)}{\sqrt{(a^2+(b+c)^2)}},$$

en

en $$DC = \frac{(a+b+c)\,a}{\sqrt{(a^2+(b+c)^2)}}.$$

waardoor dus de drie zijden van den driehoek gevonden zijn.

Door conſtructie worden deze zijden even eens gemakkelijk gevonden, want uit F op AB de loodlijn FG neder latende, zoo zijn de regthoekige driehoeken AGF en FDA gelijk en gelijkvormig, en dus FG = ED; beſchrijvende alzoo op de gegevene lijn BD uit F met FD als ſtraal eenen halven cirkel, en trekkende aan dezelve uit B en D de raaklijnen AB en AD, dan zijn de zijden AB en AD gevonden; op dezelfde wijze uit E met ED als ſtraal eenen halven cirkel beſchrijvende, vindt men de zijden BC en DC.

XI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar drie rationale kwadraten, die eene harmoniſche reeks uitmaken?

OPGELOST *door* H. STROOTMAN, J. BASSAN, C. F. JULIUS *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* H. STROOTMAN.

Stel de beide eerſte termen der reeks x^2 en y^2, dan is de derde term

$$\frac{x^2y^2}{2x^2-y^2}.$$

De teller reeds een vierkant zijnde, zoo moet men ſlechts $2x^2-y^2$ tot een vierkant maken. Stel daartoe

$$2x^2-y^2=(x+c)^2=x^2+2cx+c^2,$$

dan is $$x=c\pm\sqrt{(y^2+2c^2)}.$$

Stellende nu wederom

$$y^2+2c^2=(y+bc)^2,$$

dan vindt men $$y=\frac{(2-b^2)\,c}{2b}.$$

Neemt men nu bij voorbeeld $b=1$, $c=14$, dan wordt $x=35$, $y=7$, en de drie getallen zijn alzoo

1225, 49 en 25.

XII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar eene rekenkunſtige reeks van vier leden, waarvan

van de ſom der kwadraten van de termen een kubiek, en de ſom der derde magten van de termen een kwadraat zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, C. F. JULIUS *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel voor de termen der reeks $x-3px$, $x-px$, $x+px$ en $x+3px$, dan is de ſom der vierkanten van de termen $4x^2+20p^2x^2$, en de ſom der derde magten $4x^3+60p^2x^3$. Deze laatſte uitdrukking een vierkant moetende zijn, zoo heeft men ſlechts $x+15p^2x$ rationaal te maken; ſtellende daartoe

$$x+15p^2x=r^2x^2,$$

of

$$1+15p^2=r^2x,$$

zoo is

$$x=\frac{1+15p^2}{r^2}.$$

Hierdoor wordt de ſom der vierkanten

$$4x^2+20p^2x^2=4(1+5p^2)\frac{(1+15p^2)^2}{r^4}=\frac{(1+15p^2)^2}{r^3}\times\frac{4+20p^2}{r},$$

hetwelk een cubiek getal moet worden. Hiertoe ſtellen wij

$$1+15p^2=\frac{4+20p^2}{r},$$

waaruit volgt

$$r=\frac{4+20p^2}{1+15p^2},$$

en verder

$$x=\frac{(1+15p^2)^3}{(4+20p^2)^2}.$$

Hierdoor vindt men voor de termen der reeks

$$\frac{(1+15p^2)^3}{(4+20p^2)^2}(1-3p),\ \frac{(1+15p^2)^3}{(4+20p^2)^2}(1-p),\ \frac{(1+15p^2)^3}{(4+20p^2)^2}(1+p)$$

en

$$\frac{(1+15p^2)^3}{(4+20p^2)^2}(1+3p).$$

Voor $p=\frac{1}{5}$ is de reeks

$$\frac{16}{225},\ \frac{32}{225},\ \frac{48}{225}\ \text{en}\ \frac{64}{225}.$$

XIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar drie getallen, de eigenſchap hebbende, dat de ſom der middelſte met de derde magt van het eerſte en van de middelſte met de derde magt van het derde, twee rationale kwadraten vormen?

OP-

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Laten de drie getallen zijn x, $y^2 - x^2$ en z, dan is reeds aan de eerste voorwaarde voldaan; de tweede voorwaarde eischt, dat

$$y^2 - x^2 + z^2$$

een vierkant zij; men stelle dan

$$y^2 - x^2 + z^2 = (y + a)^2,$$

dan volgt daaruit $y = \frac{z^2 - x^2 - a^2}{2a}$,

waarin men voor z, x en a willekeurige getallen mag nemen.

Voor $z = 4$, $x = 3$ en $a = 1$ vindt men $y = 18$, en alsdan zijn de getallen 3, 297 en 4.

XIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert eene meetkunstige reeks van een even aantal termen, waarvan de som een kwadraat zij, moetende de wortel van het kwadraat gelijk zijn aan de rekenkunstige middenevenredige tusschen de middelste termen der reeks?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. JONKHERT *en* C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel den eersten term der reeks $= x$, de gemeene rede $= y$ en het aantal der termen $= 2n$; dan is de som der termen

$$\frac{x(y^{2n} - 1)}{y - 1}.$$

Verder is de rekenkunstige middenevenredige tusschen de beide middelste termen

$$\tfrac{1}{2}(xy^{n-1} + xy^n) = \tfrac{1}{2}xy^{n-1}(1 + y),$$

en wij hebben dus uit de voorwaarde des vraagstuks

$$\frac{x(y^{2n} - 1)}{y - 1} = \tfrac{1}{4}x^2y^{2(n-1)}(y + 1)^2,$$

of $$x = \frac{4(y^{2n} - 1)}{(y - 1)(y + 1)^2 y^{2n-2}}.$$

waarin men nu voor y en n getallen naar willekeur kan nemen.

Voor $y = 2$ en $n = 3$ vindt men $x = \frac{7}{4}$ en voor de reeks

$\frac{7}{4}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{28}{4}$, $\frac{56}{4}$, $\frac{112}{4}$ en $\frac{224}{4}$.

XV.

XV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men uit den top van eenen driehoek eene loodlijn op de bazis nederlaat en uit de hoeken aan de bazis cirkelbogen beschrijft, de segmenten, waarin de bazis verdeeld is, tot straal hebbende, zoo vraagt men den driehoek te bepalen, als gegeven zijn de loodlijn, de tophoek alsmede de afstand der snijpunten in de opstaande zijden?

OPGELOST door J. BASSAN.

Laat ABC (*Fig.* 7) de begeerde driehoek zijn, waarin AE = AD en FC = CD genomen is, dan is BD = a, EF = b en hoek ABC = α bekend. Nemende nu hoek A = ϕ, dan volgt uit de regthoekige driehoeken ADB en BDC,

$$BE = AB - AD = a(Cosec.\phi - Cot.\phi) = \frac{a(1 - Cos.\phi)}{Sin.\phi},$$

en $BF = BC - CD = a(Cosec.(180 - (\alpha+\phi)) - Cot.(180 - (\alpha+\phi))$

$$= a\frac{1 + Cos.(\alpha+\phi)}{Sin.(\alpha+\phi)}.$$

Uit den driehoek BEF volgt verder

$$BF^2 = BE^2 + BF^2 - 2\,BE \times BF\,Cos.EBF,$$

en hierin de gevondene waarden stellende,

$$b^2 = a^2\frac{(1-Cos.\phi)^2}{Sin^2.\phi} + a^2\frac{(1+Cos.(\alpha+\phi))^2}{Sin.(\alpha+\phi)} - a^2 Cos.\alpha\,\frac{(1-Cos\,\phi)(1+Cos.(\alpha+\phi))}{Sin.\phi\,Sin.(\alpha+\phi)},$$

of $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1-Cos\,\phi}{1+Cos\,\phi} + \frac{1+Cos.(\alpha+\phi)}{1-Cos(\alpha+\phi,} - Cos.\alpha\sqrt{\frac{(1-Cos\,\phi)(1+Cos.(\alpha+\phi))}{(1+Cos.\phi)(1-Cos.(\alpha+\phi_{,}))}}$

of $\frac{b^2}{a^2} = Tang^2.\frac{1}{2}\phi + Cot^2.\frac{1}{2}(\alpha+\phi) - 2\,Cos.\alpha\,Tang.\frac{1}{2}\phi Cot.\frac{1}{2}(\alpha+\phi).$

Hierin $Tang.\frac{1}{2}(\alpha+\phi)$ ontwikkelende en alles volgens de magten van $Tang.\frac{1}{2}\phi$ rangschikkende, vindt men de vergelijking:

$$Tang^4.\tfrac{1}{2}\phi + 2\,Tang.\tfrac{1}{2}\alpha\,(1+Cos.\alpha)Tang^3.\tfrac{1}{2}\phi + \ldots$$

$$(2\,Tang^2.\tfrac{1}{2}\alpha - 2\,Cos.\alpha + 2\,Cos.\alpha\,Tang^2.\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{b^2}{a^2})\,Tang^2.\tfrac{1}{2}\phi$$

$$- 2\,Tang.\tfrac{1}{2}\alpha(\frac{b^2}{a^2} + 1 + Cos.\alpha)\,Tang.\tfrac{1}{2}\phi - (\frac{b^2}{a^2}\,Tang^2.\tfrac{1}{2}\alpha - 1) = 0.$$

Waaruit de hoek ϕ gevonden kan worden, en alsdan zijn de stuk-

ſtukken AE, CF, EB en BF mede bekend, en alzoo den geheelen driehoek berekend.

XVI. VOORSTEL.

Door J. VAN DER LINDEN.

Wanneer van drie getallen het eerſte en derde zoo veel bedraagt als tweemaal het tweede, en het product des eerſten en tweeden is a (30) en dat het product van het derde en eerſte opgeteld met het vierkant des tweeden gelijk b (151) is, zoo vraagt men naar die getallen?

OPGELOST *door* J. VAN DER LINDEN, H. STROOTMAN, J. JONKBERT, G. GRAASLAND, J. BASSAN, C. F. JULIUS, B. G. VAN KELL *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. VAN DER LINDEN.

Stel de gevraagde getallen x, y en z, dan is volgens het voorſtel

$$x+z=2y, \quad xy=a \quad \text{en} \quad xz+y^2=b,$$

de waarde van y uit de tweede in de eerſte vergelijking gebragt, geeft

$$x^2+xz=2a,$$

en in de derde

$$x^2z+a^2=x^2b,$$

de waarde van z uit de voorlaatſte in de laatſte vergelijking geſteld, geeft

$$x^4-a^2=2ax^2-x^2b,$$

of $$x^4+(b-2a)x^2=a^2,$$

waaruit $$x^2=\frac{2a-b}{2}\pm\sqrt{(a^2+\frac{(2a-b)^2}{4})},$$

$$=\frac{2a-b}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(8a^2-4ab+b^2)},$$

en $$x=\pm\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(2a-b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(8a^2-4ab+b^2)}\}}.$$

Stellende nu $a=30$ en $b=151$, zoo vindt men

$$x=\pm\sqrt{\{-\frac{91}{2}\pm\sqrt{(\frac{22801-18120+7200}{4})}\}}$$

$$=\pm\sqrt{(-\frac{91}{2}\pm\frac{109}{2})}=\pm 3,$$

derhalve $$y=\pm\frac{30}{3}=\pm 10,$$

Opgelost *door* J. Bassan, J. Jonkhert *en* C. F. Julius.

Oplossing *van* J. Bassan.

Wanneer ABC (*Fig.* 9) den begeerden driehoek voorstelt, waarin AD = DC is, en de lijnen AE en CF de hoeken A en C midden door deelen, zoo stellen wij DE = a, FE = b en FB = c. Uit den driehoek BAD heeft men dan volgens eene bekende eigenschap

$$DE : BE = AD : AB \text{ of } AB = \frac{BE \times AD}{DE} = AD\,\frac{b+c}{a},$$

en uit den driehoek DCB

$$BC = DC\,\frac{BF}{DF} = AD\,\frac{c}{a+b}.$$

Maar in den driehoek ABC is ook

$$AB^2 + BC^2 = 2\,\overline{AD}^2 + 2\,\overline{BD}^2,$$

dus $$AD^2\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + AD^2\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 = 2\,\overline{AD}^2 + 2(a+b+c)^2.$$

en derhalve $$AD^2 = \frac{2(a+b+c)^2 a^2 (a+b)^2}{(b+c)^2(a+b)^2 + c^2 a^2 - 2a^2(a+b)^2},$$

waardoor dan nu ook de overige zijden gevonden zijn.

XX. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert eenen regthoekigen driehoek te berekenen, als bekend zijn de stukken, waarin de verlengde lijn, die den tophoek van den driehoek midden door deelt, verdeeld wordt door de loodlijnen uit de beide andere hoeken?

Opgelost *door* J. Bassan *en* J. Jonkhert.

Oplossing *van* J. Bassan.

Zij ABC (*Fig.* 10) de begeerde driehoek, waarin C regthoekig, BE den hoek B midden door deelt en CF en AE loodregt op BE staan; en nemen wij BF = a en BE = b.

Nu zijn de driehoeken AEB en BFC gelijkvormig, derhalve is

$$BE : BF = b : a = AB : BC = AD : DC = ED : DF.$$

Maar $$BD = EF - DF = b - a - DF,$$

dus $$b : a = b - a - DF : DF,$$

waaruit $$DF = \frac{a(b-a)}{b+a},$$

dus

dus $DE = b - a - DF = \frac{b(b-a)}{b+a}$,

als mede $DB = BF + DF = a + \frac{a(b-a)}{b+a} = \frac{2ba}{b+a}$.

Omdat de driehoek DCB regthoekig is, zoo heeft men

$$DC^2 = DF \times BD = \frac{a(b-a)}{b+a} \times \frac{2ba}{b+a}$$
$$= \frac{2a^2b(b-a)}{(b+a)^2},$$

dus $BC^2 = DB^2 - DC^2 = \frac{4b^2a^2}{(b+a)^2} - \frac{2a^2b(b-a)}{(b+a)^2}$
$$= \frac{2a^2b(b+a)}{(b+a)^2} = \frac{2a^2b}{b+a}.$$

Maar $AB : BC = b : a$, of $AB = BC\frac{b}{a}$,

dus $BA^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{2a^2b}{b+a} = \frac{2b^2}{b+a}$.

Eindelijk is $AC^2 = AB^2 - BC^2 = \frac{2b(b^2-a^2)}{b+a}$
$$= 2b(b-a),$$

waardoor dan de drie zijden van den driehoek gevonden zijn.

XXI. VOORSTEL.

Door H. STROOTMAN.

Welke is de meetkunstige reeks van vijf termen, alwaar de som der even termen is a en de som der oneven b?

OPGELOST *door* H. STROOTMAN, C. F. JULIUS, J. BASSAN, J. JONKHERT *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* H. STROOTMAN.

Laten de vijf termen van de reeks zijn A, B, C, D en E, dan zal, ingevolge de eigenschap van eene meetkunstige reeks,

$$A \times C = B^2, \quad B \times D = C^2 \text{ en } C \times E = D^2$$

zijn. Nu is verder volgens de voorwaarden des vraagstuks

$$A + C + E = b \text{ en } B + D = a,$$

of $A \times C + C^2 + C \times E = b \times C$ en $B^2 + 2B \times D + D^2 = a^2$,

voor de eerste dezer laatste vergelijkingen kan men schrijven

$$B^2 + B \times D + D^2 = b \times C,$$

en deze van de laatste aftrekkende, vindt men

$$B \times D = a^2 - bC = C^2,$$

waaruit gevonden wordt voor den middelsten term der reeks

$$C = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}b^2)}.$$

Verder is nu $C^2 = DB$ en $B + D = a$,

waaruit volgt $C^2 = D(a - D)$,

en dus $D = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(a^2 - C^2)}$.

Op dezelfde wijze vindt men voor B

$$C^2 = B(a - B)$$

en $B = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - C^2)}$.

Eindelijk is $D^2 = C \times E$,

of $$E = \frac{1}{C}\left\{\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - C^2)}\right\}^2.$$

Men zal echter het benedenſte teeken van den wortel in de waarde van B moeten nemen en het bovenſte in die van D, om de eigenlijke waarde der termen te vinden.

XXII. VRAAGSTUK.

Door H. STROOTMAN.

Welke is de meetkunstige reeks van een even aantal termen, de ſom der evene termen $= a$ en die der onevene $= b$ zijnde?

OPGELOST *door* H. STROOTMAN, J. JONKHERT, J. BASSAN, C. F. JULIUS *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* H. STROOTMAN.

Stel het eerſte lid der reeks x en de gemeene rede y, dan is de reeks van $2n$ termen

$$x, xy, xy^2 \ldots xy^{2n-2} \text{ en } xy^{2n-1}.$$

De voorwaarden van het vraagſtuk geven ons

$$x + xy^2 + xy^4 \ldots xy^{2n-2} = b,$$

en $$xy + xy^3 + \ldots xy^{2n-1} = a,$$

waarvoor men ſchrijven kan

$$x(1 + y^2 + y^4 + \ldots y^{2n-2}) = b,$$

en $$xy(1 + y^2 + y^4 + \ldots y^{2n-2}) = a,$$

derhalve $$\frac{1}{y} = \frac{b}{a} \text{ of } y = \frac{a}{b}.$$

De

De som der geheele reeks is

$$a+b=x\frac{y^{2n}-1}{y-1},$$

hierin voor y zijne waarde, zoo komt er

$$a+b=x\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}-1}{\frac{a}{b}-1}$$

$$=x\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a^{2n-1}b-b^{2n}},$$

en dus

$$x=\frac{b^{2n-1}(a^2-b^2)}{a^{2n}-b^{2n}},$$

Waardoor dan de reeks bekend is, zoodra het aantal termen gegeven is.

XXIII. VOORSTEL.

Door H. STROOTMAN.

De lengte der duigen van eene ikegelvormige kuip is binnenwerks gemeten 0,84 el, de middellijn van den bodem 1,79 el, en van de bovenwijdte 1,86; men wil deze kuip, die eenen inhoud van 2,1598 kubiek ellen heeft, veranderen in eene, die 2 kubiek ellen inhoud zal hebben: hoe veel moet er dan van de duigen aan het bovenein de afgezaagd worden?

OPGELOST *door* H. STROOTMAN, J. BASSAN, C. F. JULIUS *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Laat ACGI (*Fig.* 11) de geheele kuip voorstellen, waarin nu $GC=1,79=2a$, $IA=1,86=2b$ en $AC=0,84=l$ is, en laat verder $BC=x$ het stuk voorstellen, dat van de kuip overblijft, om den gevraagden inhoud van 2 cubiek ellen te vinden.

Uit de gelijkvormige driehoeken ECB en CFA volgt dadelijk

$$EB:AF=BC:AC,$$

of

$$EB=\frac{(b-a)x}{l},$$

en dus

$$HB=2a+2\frac{b-a}{l}x.$$

Verder is $EC : CF = CB : CA$,

dus $EC = \frac{x}{l}\sqrt{(l^2-(b-a)^2)}$.

Voor den inhoud I van den afgekorten kegel hebben wij dus

$$I = \frac{\pi}{12} CE \{GC^2 + GC \times HB + HB^2\}$$
$$= \frac{\pi}{12} CE \frac{GC^3 - HB^3}{GC - HB}$$
$$= \frac{\pi}{12} CE \frac{HB^3 - GC^3}{2EB}$$
$$= \frac{\pi}{12} \times \frac{x}{l}\sqrt{(l^2-(b-a)^2)} \{(2a+2\frac{b-a}{l}x)^3 - 8a^3\} \frac{l}{2x(b-a)}$$
$$= \frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{(l^2-(b-a)^2)}}{b-a} \{(a+\frac{b-a}{l}x)^3 - a^3\}.$$

Waaruit volgt

$$(a+\frac{b-a}{l}x)^3 = a^3 + \frac{3}{\pi} I \frac{b-a}{\sqrt{(l^2-(b-a)^2)}},$$

en $x = \frac{l}{b-a}\{-a + \sqrt[3]{\{a^3 + \frac{3}{\pi} I \frac{b-a}{\sqrt{(l^2-(b-a)^2)}}\}}$.

Hierin de gegeven waarden voor a, b, l en I gesteld, zoo vindt men

$$x = 0{,}7656,$$

en dus het afgesnedene stuk $0{,}84 - 0{,}7656 = 0{,}0744$ el.

XXIV. VRAAGSTUK.

Door J. W. MARTINI.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen en te construeren, wanneer de hoeken gegeven zijn en de afstanden van drie evenwijdige lijnen door de hoeken getrokken?

OPGELOST *door* J. W. MARTINI, J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Laat *Fig.* 12. ABC de begeerde driehoek zijn, en DC, AF en GB de evenwijdige lijnen, wier afstanden $AH = a$ en $GH = b$ gegeven zijn, alsmede de hoeken des driehoeks; stellende nu hoek $GAB = \phi$, dan is

$$AB = AG \times Sec.\,\phi = (b-a)\,Sec.\,\phi \quad \ldots\ldots (1),$$
$$AC = AH \times Sec.(180 - (\phi + A)) = -a\,Sec.(\phi + A) \ldots (2).$$

Maar

Maar $AB : AC = Sin.(A+B) : Sin.B$,

dus $(b-a)\,Sec.\,\phi : -a\,Sec.\,(\phi+A) = Sin.(A+B) : Sin.B$,

of $\dfrac{(a-b)\,Cos.\,(\phi+A)}{a\,Cos.\,\phi} = \dfrac{Sin.(A+B)}{Sin.B}$,

of met ontwikkelende en teller en noemer des eerſten lids door $Cos.\phi$, en die van het tweede door $Sin.B$ deelende, alsmede de geheele vergelijking door $Sin.A$, dan komt er

$$\frac{(a-b)}{a}(Cot.A - Tang.\phi) = Cot.B + Cot.A,$$

of $$Tang.\phi = \frac{(a-b)\,Cot.A - a\,(Cot.B + Cot.A)}{a-b}$$

$$= \frac{b\,Cot.A + a\,Cot.B}{b-a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

De hoek ϕ bekend zijnde, zoo zijn de zijden uit de vergelijkingen (1) en (2) gemakkelijk te berekenen. Men kan dezelve ook nog aldus uit de figuur vinden

$$AB = V(AG^2 + GB^2) = V\{(b-a)^2 + (b-a)^2\,Tang^2.\phi\}$$
$$= V\{(b-a)^2 + (b\,Cot.A + a\,Cot.B)^2\},$$

$$AC = \frac{Sin.B}{Sin.(A+B)}V\{(b-a)^2 + (b\,Cot.A + a\,Cot.B)^2\},$$

en $$BC = \frac{Sin.A}{Sin.(A+B)}V\{(b-a)^2 + (b\,Cot.A + a\,Cot.B)^2\}.$$

De vergelijking (3) geeft eene zeer gemakkelijke conſtructie aan de hand; men trekke ſlechts uit A de lijn DA, zoodat *hoek* $ADH = hoek\,B$, en uit G de lijn GE zoodanig, dat *hoek* $GEH = hoek\,A$ zij, dan zal blijkbaar $DE = b\,Cot.A + a\,Cot.B$ zijn, en derhalve $DE = GB = (b-a)\,Tang.\phi$ wezen; het punt B alzoo bepaald zijnde, zoo wordt C gevonden door BC den gegeven hoek B met AB te laten maken.

Daar overigens $CF : FB = AH : GA$ is, zoo kan de volgende conſtructie gebruikt worden; men conſtruere eenen driehoek $A'B'C'$ gelijkvormig met den gegevenen, neme op eene der zijden een punt F' zoodanig, dat $C'F' : B'C' = a : b$ zij, en trekke $A'F'$, dan zal *hoek* $C'A'F' = hoek\,CAF$ zijn, en hierdoor wederom de ſtand van den driehoek ABC bepaald wezen. Daar men het punt F' op elke der drie zijden van den driehoek kan

nemen, zoo blijkt hieruit, dat men naar goedvinden eene der hoekpunten van den driehoek in elke der evenwijdige lijnen naar willekeur kan brengen; of, in andere woorden, men kan door de hoekpunten van eenen driehoek drie verschillende stelsels van evenwijdige lijnen trekken, die denzelfden gegevenen afstand hebben.

XXV. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen en te construeren, wanneer de inhoud, de som der vierkanten van de zijden en de afstanden van drie evenwijdige lijnen, door de hoeken getrokken, gegeven zijn?

OPGELOST *door* J. W. MARTINI *en* C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Zij ABC (*Fig.* 13) wederom de begeerde driehoek, en DC, AI en KB de drie evenwijdige lijnen, waarin $AD = a$ en $DK = b$ is. De inhoud van den driehoek gegeven zijnde, zoo kan men dezen $= bp$ stellen, p dus als gegeven beschouwende; even zoo kan men voor de gegevene som der vierkanten van de zijden stellen bq, waarin q gegeven is. Stellende dan nu *hoek* $BCL = \phi$, zoo heeft men

$$BL = GC = b\,Tang.\phi \text{ en } BC = b\,Sec.\phi = b\sqrt{1 + Tang^2.\phi}.$$

Omdat verder de driehoek ABC = driehoek AIB + driehoek AIC is, zoo is dan

$$bp = \tfrac{1}{2}AI \times AK + \tfrac{1}{2}AI \times AD$$
$$= \tfrac{1}{2}AI \times DK = \tfrac{1}{2}AI \times b,$$

dus $$2p = AI,$$

en $$IM = a\,Tang.\phi,$$

dus $$KL = DC = AM = a\,Tang.\phi + 2p,$$

en $$KB = KL - BL = a\,Tang.\phi + 2p - b\,Tang.\phi$$
$$= (a - b)\,Tang.\phi + 2p.$$

Wij hebben dus

$$BC^2 = b^2(1 + Tang^2\phi)$$
$$AB^2 = (b - a)^2 + ((a - b)\,Tang.\phi + 2p)^2,$$
$$AC^2 = a^2 + (a\,Tang.\phi + 2p)^2,$$

waar-

waarvan de ſom is

$$bq = b^2 + (b-a)^2 + a^2 + ((a-b)^2 + a^2 + b^2)\,Tang^2.\Phi + 4p(2a-b)\,Tang.\Phi + 8p^2,$$

of $bq = 2(a^2 - ab + b^2) + 2\,Tang^2.\Phi(a^2 - ab + b^2) + 4p\,Tang.\Phi(2a-b) + 8p^2,$

Stellende nu $2(a^2 - ab + b^2) = d^2$,

dan is $Tang^2.\Phi + \frac{p(2a-b)}{d^2}\,Tang.\Phi + \frac{8p^2 + d^2 - bq}{d^2} = 0,$

waaruit volgt

$$Tang.\Phi = -\frac{p(2a-b)}{d^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{p^2(2a-b)^2}{d^4} + \frac{bq - d^2 - 8p^2}{d^2}\right\}}$$

$$= -\frac{(2a-b)p}{d^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{-12p^2b^2}{d^4} + \frac{bq - d^2}{d^2}\right\}}$$

$$= \frac{1}{d^4}\{-2(2a-b)p \pm \sqrt{(bqd^2 - d^4 - 12p^2b^2)}\}.$$

Zal deze waarde van *Tang.* Φ mogelijk wezen, dan moet bq grooter of gelijk aan $d^2 + 12\frac{p^2b^2}{d^2}$ zijn; dat is in woorden: *de ſom der vierkanten van de zijden moet gelijk of grooter zijn dan de ſom der vierkanten der drie afſtanden van de evenwijdige lijnen, opgeteld met het quotient van twaalfmaal de tweede magt van den inhoud des driehoeks met de ſom der vierkanten van de drie zoo even genoemde afſtanden.*

De waarde van *Tang.* Φ bekend zijnde, zoo zijn nu ook de overige zijden van den driehoek uit de hier voren gevondene waarde van de vierkanten dezer zijden dadelijk gevonden, en dienſvolgens ook de hoeken.

De gevondene waarde van *Tang.* Φ geeft de volgende conſtructie voor de lijn BL, namelijk

$$BL = bTang.\Phi = -\frac{(2a-b)pb}{d^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{bq}{d^2}b^2 - b^2 - 12\frac{p^2b^2}{d^4}b^2\right\}}.$$

Zij in *Fig.* 14 $CL = b$, $CM = a$ en $CG = q$; door dan op LG eenen halven cirkel te beſchrijven en de loodlijn CA te trekken, zoo is $AC^2 = bq$; verder make men $CD = ML = b - a$ zoo is $DM^2 = (b-a)^2 + a^2$; nemende nu $CD' = MD$, dan is $LD'^2 = b^2 + a^2 + (b-a)^2 = d^2$ of $LD' = d$, makende wederom

BC

$BC = D'L = d$, en trekkende AE evenwijdig aan BL, zoo is $CB : CA = CL : CE = b\frac{\sqrt{bq}}{d}$ en dus $CE^2 = b^2\frac{bq}{d^2}$; beſchrijft men nu uit L met CE eenen cirkelboog ſnijdende CQ in L' zoo is $\overline{CL'}^2 = \frac{bq}{d^2}b^2 - b^2$. Laat nu nog CN de zijde van het vierkant voorſtellen, welks inhoud gelijk is aan den inhoud van den driehoek, zoodat $CN^2 = bp$ is, men neme $CB' = CB = d$ en trekke OB' evenwijdig aan BN, dan is $CO : CB = CB' : CN$ of $CO \times CN = CB'^2$, dus $CN^2 : CB^2 = CN : CO$; nu neme men $CL'' = CL = b$ en trekke $L''P'$ evenwijdig aan ON, zoo is ook $CO^2 : CL''^2 = CN^2 : CP^2$ of $CP^2 = \frac{CN^2}{CO^2} \times CL''^2 = \frac{CN^4}{CB^4}b^2 = \frac{b^2p^2}{d^4}b^2$. Eindelijk neme men $P'C = 2CP$ en beſchrijve uit P' met $2CP'$ als ſtraal eenen cirkelboog, ſnijdende AC in Q, dan is $CQ^2 = 16CP^2 - 4CP^2 = 12CP^2 = 12\frac{b^2p^2}{d^4}b^2$, zoodat makende $CQ' = CQ$, en uit Q' met CL' eenen cirkelboog beſchrijvende in P'' de lijn CQ ſnijdende, de lijn CP'' de waarde van de wortelgrootheid in de uitdrukking voor BL voorſtelt. Om de waarde van den rationalen term dezer uitdrukking te vinden zoo make men $CR = 2(2CM - CL)$ en trekke RS evenwijdig aan ON, dan is CS de gevraagde waarde, want $CS : CR = CN : CO = CN^2 : CB^2$ (hier boven gevonden) $= p : b : d^2$, dus $CS = \frac{2d^2 - b^2}{d^2}p.b.$

De lijn DC in *Fig.* 13 wordt dan gevonden door CS van CP'' af te trekken, of wel door de ſom dezer lijnen van D op het verlengde van DC naar de negative zijde uit te zetten, waardoor men eenen tweeden ſtand voor den driehoek verkrijgt.

Nemende dan (*Fig.* 14) $LZ = CP'' - CS$ en $LZ' = CP'' + CS$, zoo vindt men $YZ = 2p$ door $CN' = CN$ te nemen LN' en TN' loodregt op LN' te trekken, zijnde dan $TC = \frac{CN'^2}{CL} = \frac{bp}{b} = p$; maakt men nu $YX = Y'X' = 2TC$, zoo zijn de beide driehoeken geconſtrueerd.

AAN-

AANMERKINGEN. Het ſpreekt van zelf, dat men den driehoek CZX aan de andere zijde van CE had kunnen conſtrueren, en alzoo vier driehoeken verkrijgen, welke aan het voorſtel voldoen, waarvan er dan twee aan elkander gelijk en gelijkvormig zullen zijn.

Indien de lijn MX midden tusſchen de beide andere doorloopt, of dat $b - a = a$ of $b = 2a$ is, dan wordt $d^2 = 6a^2$, en de waarde van BL wordt

$$BL = \pm V\{\tfrac{1}{2}aq - 4a^2 - \tfrac{1}{8}p^2\}.$$

Blijkbaar wordt hier ook de conſtructie aanzienlijk vereenvoudigd, en men ziet, dat er ſlechts twee driehoeken gelijk en gelijkvormig aan elkander aan de vraag zullen voldoen.

Eene aanmerkelijke vereenvoudiging heeft plaats, wanneer de gegevens zoodanig genomen worden dat de wortelgrootheid verdwijnt; doch dit vereischt dan in het algemeen eene betrekking meer tusſchen de gegevens, zoodat men er één minder naar willekeur mag aannemen.

XXVI. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

Men vraagt eenen driehoek te conſtrueren en te berekenen, wanneer de inhoud, eene zijde en de afſtanden van drie evenwijdige lijnen door de hoeken gaande, gegeven zijn?

OPGELOST *door* J. W. MARTINI, J. BASSAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Laat even als in het voorgaande vraagſtuk (*Fig.* 15) $MC = a$, $CL = b$ en de inhoud van den driehoek $= pb$ zijn. Indien dan *hoek* $BCA = \gamma$ gegeven is, en *hoek* $LCB = \phi$ geteld wordt, dan is even als in het vorige vraagſtuk

$$IA = 2p = AM - MI = a\,Tang.(\phi + \gamma) - a\,Tang.\phi \quad . \quad (1).$$

Is daarentegen *hoek* $CBA = \beta$ gegeven, dan is

$$IA = 2p = IH + AH = (b-a)\,Tang.\phi + (b-a)\,Tang.(\beta - \phi) \quad . \quad (2).$$

Is eindelijk *hoek* $BAC = \alpha$ gegeven, zoo ſtellen wij *hoek* $BAG = \psi$ en dan is

$$pb = \tfrac{1}{2}\,Sin.\alpha \times AB \times AC = -\tfrac{1}{2}\,Sin.\alpha\,\frac{a(b-a)}{Cos.\psi\,Cos.(\alpha+\psi)} \quad . \quad (3).$$

Uit de vergelijking (1) volgt door ontwikkeling

$$a\,Tang.$$

$$a\,Tang.\gamma(1+Tang^2.\phi)=2p\,(1-Tang.\gamma\,Tang.\phi);$$

en derhalve $Tang.\phi=-\frac{p}{a}\pm V\left\{\frac{2p-a\,Tang.\gamma}{a\,Tang.\gamma}+\frac{p^2}{a^2}\right\}$,

en dus $MI=a\,Tang.\phi=-p\pm V\{2p\,a\,Cot.\gamma-a^2+p^2\}$.

De conſtructie dezer formule is gemakkelijk. Men neme (*Fig.* 16) op eene regte lijn, $CM=a$, $CL=b$ en trekke de loodlijnen uit C, M en L. Verder trekke men CN zoodanig, dat hoek $CNM=\gamma$, waardoor $MN=a\,Cot.\gamma$ is. Nu make men $MP=PO=p$, $MN'=MN$ en beſchrijve op N'O eenen halven cirkel, dan is $MK^2=2p\,a\,Cot.\gamma$, beſchrijft men nu uit C met MK eenen cirkelboog, ſnijdende MK in K', en trekt men PK', dan is $PK'^2=2p\,a\,Cot.\gamma-a^2+p^2$,

zoodat nu PM+PK' en PK'—PM de beide waarden van MI voorſtellen; en zijn derhalve de driehoeken, welke aan de vraag voldoen, geheel bepaald.

Uit de vergelijking (2) vindt men door ontwikkeling

$$2p\,(1+Tang.\beta\,Tang.\phi)=(b-a)\,Tang.\beta\,(1+Tang^2.\phi),$$

waaruit

$$Tang.\phi=\frac{p}{b-a}\pm V\left\{\frac{2p}{b-a}\,Cot.\beta-1+\frac{p^2}{(b-a)^2}\right\},$$

of

$$III=(b-a)\,Tang.\phi=p\pm V\{2p\,(b-a)\,Cot.\beta-(b-a)^2+p^2\}.$$

Waarvan de conſtructie nagenoeg op dezelfde wijze als de voorgaande kan ingerigt worden.

Uit de vergelijking (3) heeft men door ontwikkeling

$$2p\,b\,(Sin.\alpha\,Sin.\psi-Cos.\alpha\,Cos.\psi)=a\,(b-a)\,Sin.\alpha,$$

deelende door $Cos^2.\psi\,Cos.\alpha$, dan komt er

$$2p\,b\,(Tang.\alpha\,Tang.\psi-1)=a\,(b-a)\,Tang.\alpha\,(1+Tang^2.\psi),$$

waaruit

$$Tang.\psi=\frac{pb}{a\,(b-a)}\pm V\left\{\frac{p^2b^2}{(b-a)^2a^2}-\frac{2pb}{a\,(b-a)}\,Cot.\alpha-1\right\},$$

of

$$BG=(b-a)\,Tang.\psi=\frac{pb}{a}\pm V\left\{\frac{p^2b^2}{a^2}-\frac{2pb}{a}\,Cot.\alpha-(b-a)^2\right\},$$

waarvan de conſtructie even eens veel overeenkomst met de vorige heeft.

XXVII.

XXVII. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen en te construeren, wanneer de inhoud, eene zijde en de afstanden van drie evenwijdige lijnen door de hoeken gaande, gegeven is?

OPGELOST *door* J. W. MARTINI, C. F. JULIUS, J. BASSAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Laat wederom ABL (*Fig.* 17) de begeerde driehoek zijn, waarin $MC=a$ en $CL=b$, $AL=c$ en de inhoud gelijk pb gegeven is. Dan volgt uit de oplossing van het 25ste Voorstel, dat $AI=2p$ is. Verder heeft men

$$AM^2=AL^2-LM^2=c^2-(b-a)^2,$$

derhalve $IM=AM-AI=\sqrt{(c^2-(b-a)^2)}-2p.$

Nu is ook $BC:IM=LC:LM,$

of $$BC=IM\frac{LC}{LM}=\frac{b}{b-a}\{\sqrt{(c^2-(b-a)^2)}-2p\},$$

dus $$LB=\sqrt{(BC^2+LC^2)}=\sqrt{\{b^2+\frac{b^2}{(b-a)^2}(2p-\sqrt{(c^2-(b-a)^2)})^2\}}$$

$$=\frac{b}{b-a}\sqrt{\{(b-a)^2+(2p-\sqrt{(c^2-(b-a)^2)})^2\}}.$$

Verder is

$$MA-BC=AH=\sqrt{(c^2-(b-a)^2)}-\frac{b}{b-a}\{\sqrt{(c^2-(b-a)^2)}-2p\}$$

$$=\frac{2pb}{b-a}-\frac{a}{b-a}\sqrt{(c^2-(b-a)^2)},$$

dus

$$AB=\sqrt{(AH^2+CM^2)}=\sqrt{\{a^2+\frac{1}{(b-a)^2}(2pb-a\sqrt{(c^2-(b-a)^2)})^2\}}.$$

De constructie kan op de volgende wijze zeer eenvoudig verrigt worden. Uit L beschrijve men met $AL=c$ als straal eenen cirkelboog, snijdende AM in A'; en op AL construere men eenen driehoek AB'L, wiens inhoud gelijk is aan den gegevenen; eindelijk trekke men B'B evenwijdig aan AL; dan is het derde hoekpunt B bepaald.

XXVIII.

XXVIII. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK ROELZ.

Gegeven zijnde de vergelijking $y\frac{\partial y}{\partial x} = a - x$, *waaraan* $y^2 = 2ax - x^2$ *voldoet, zoo vraagt men, of de waarde van* $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$ *de algemeene of bijzondere integraal is?*

OPGELOST *door* J. VAN WIJK ROELZ. *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* J. VAN WIJK ROELZ.

De integraal der gegevene vergelijking

$$y^2 = 2ax - x^2$$

zijnde, zoo differentieren wij dezelve ten opzigte der ſtandvaſtige a, en dan komt er

$$2x\partial a = 0.$$

Waaraan alleen door $x = 0$ voldaan kan worden, en daar deze onderſtelling tevens vereiſcht, dat $y = 0$ zij in de algemeene integraal, zoo blijkt hieruit, dat ter voldoening aan deze onderſtelling er eene bijzondere betrekking tuſſchen x en y zoude moeten beſtaan.

XXIX. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK ROELZ.

Eesten ſtuks vee hebben 49 guldens gekost, daaronder zijn kalveren van 12 guldens, varkens van 5 guldens, geiten van 4 guldens en eenden van 15 ſtuivers, hoe veel ſtuks kan men van ieder hebben?

OPGELOST *door* J. VAN WIJK ROELZ., C. F. JULIUS, J. JONKHERT, J. BASSAN, H. STROOTMAN, B. G. VAN KELL *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. VAN WIJK ROELZ.

Zij het getal der kalveren w, dat der varkens x en der geiten y, dan is dat der eenden $16 - w - x - y$, en wij hebben ingevolge de opgave

$$12w + 5x + 4y + \tfrac{3}{4}(16 - w - x - y) = 49,$$

of $45w + 17x + 13y = 148$,

waaruit volgt

$$y = 11 - x - 3w + \frac{5 - 4x - 6w}{13}.$$

Stellen wij nu

$$5 - 4x - 6w = 13p,$$

dan

dan volgt daaruit, dat p negatief moet wezen, indien x en w positief zijn, alsmede dat

$$x = \frac{5 - 6w - 3p}{4} = 1 - w - 3p + \frac{1 - 2w - p}{4}$$

is, en nemende verder

$$1 - 2w - p = 4q,$$

en dus $x = 1 - w - 3p + q,$

alsmede $w = \frac{1 - p - 4q}{2} = -2q + \frac{1 - p}{2},$

of $1 - p = 2n$ nemende,

$$w = -2q + n.$$

Alsdan is $p = 1 - 2n,$

en daar p negatief is, zoo is n positief; nu is ook

$$w = -2q + n,$$
$$x = 1 + 2q - n - 3p + q = 1 + 3q - n - 3p$$
$$= 1 + 3q - n - 3(1 - 2n) = 2 + 3q + 5n,$$

en $y = 11 - 3w - x + p = 11 + 6q - 3n - 3q + 2n - 5n + p$
$$= 13 + 3q + p - 8n = 13 + 3q - 8n + 1 - 2n$$
$$= 14 + 3q - 10n.$$

Dewijl n positief moet wezen, zoo volgt uit deze laatste waarde, dat n niet grooter dan de eenheid kan zijn; maar alsdan volgt uit de waarde voor w, dat $q = 0$ moet wezen, zoo w positief zal blijven; nemende dus $q = 0$ en $n = 1$, zoo is

$$w = 1, \quad x = 3 \quad \text{en} \quad y = 4,$$

derhalve $16 - w - x - y = 8.$

Welke nu de eenigste waarden in geheele getallen zijn, die aan het vraagstuk kunnen voldoen.

XXX. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt naar den loop en de voornaamste eigenschappen der kromme lijn, waarvan de polaire vergelijking is $z = a \, Log. Tang. \phi$?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN.

Laat in *Fig.* 18 AX en AY regthoekige assen voorstellen, AX den oorsprong der hoeken en AM eenen voerstraal der kromme lijn, wier vergelijking is $z = a \, Log. Tang. \phi.$ Stelt men nu in deze vergelijking $\phi = 0$, zoo wordt $z = -\infty$, de kromme; snijdt dan

is, zoo is $Tang.\Phi = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b}$.

Uit den regthoekigen driehoek ADE volgt verder

$$AE = y = b\,Tang.(\alpha - \Phi),$$

maar nu is $Tang.(\alpha - \Phi) = \frac{Tang.\alpha - Tang.\Phi}{1 + Tang.\alpha\, Tang.\Phi}$,

en hierin de waarde van $Tang.\Phi$ gesteld, heeft men

$$Tang.(\alpha - \Phi) = \frac{b\,Tang.\alpha - \sqrt{(a^2 - b^2)}}{b + Tang.\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}},$$

waaruit volgt $y = b\frac{b\,Tang.\alpha - \sqrt{(a^2 - b^2)}}{b + Tang.\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}}$,

en dus $AB = y + z = b\frac{b\,Tang.\alpha - \sqrt{(a^2 - b^2)}}{b + Tang.\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}} + \sqrt{(a^2 - b^2)}$

$$= \frac{Tang.\alpha(b^2 + a^2 - b^2)}{b + Tang.\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}}$$

$$= \frac{a^2\,Tang.\alpha}{b + Tang.\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}}.$$

Verder is $c^2x^2 = b^2 + y^2$,

en dus $x = \frac{1}{c}\sqrt{(b^2 + y^2)}$,

waarin voor y zijne waarde gesteld, geeft

$$x = \frac{1}{c} \times \frac{\sqrt{\{b^2(b + Tang.\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)})^2 + a^4\,Tang^2.\alpha\}}}{b + a\,Tang.\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}}.$$

Voor de derde zijde BC heeft men uit den driehoek DBC

$$BC = \sqrt{(a^2 + x^2 + 2ax\,Cos.\alpha)},$$

waarin voor x zijne waarde kan gesteld worden.

XXXII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Indien de som van eene harmonische reeks van vier termen een kwadraat is, en de wortel van hetzelve gelijk is dan het rekenkundige midden tusschen de middelste termen van de harmonische reeks, dan vraagt men dezelve te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, C. F. JULIUS *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Wanneer men voor den tweeden en derden term der reeks neemt

$x - y$

$x-y$ en $x+y$, dan is de eerſte term $\frac{x^2-y^2}{x+3y}$, en de laatſte $\frac{x^2-y^2}{x+3y}$, en derhalve heeft men volgens het voorſtel

$$\frac{x^2-y^2}{x+3y}+2x+\frac{x^2-y^2}{x-3y}=x^2,$$

of wel $2x(x^2-y^2)+2x(x^2-9y^2)=x^2(x^2-9y^2)$,

waaruit volgt $4(x^2-5y^2)=x(x^2-9y^2)$,

en dus $$y^2=\frac{x^2(x-4)}{9x-20}.$$

Zal nu deze uitdrukking rationale waarden voor y geven, dan moet

$$\frac{x-4}{9x-20}=p^2$$

geſteld kunnen worden; uit deze vergelijking volgt dan

$$x=\frac{20p^2-4}{9p^2-1},$$

waarin nu voor p elk willekeurig getal mag genomen worden. Voor $p=\frac{1}{3}$ wordt $x=\frac{1}{2}$ en $y=1$ en dus de reeks 3, 4, 6 en 12.

XXXIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men een zeker veelhoekig getal door zijnen wortel deelt, dan is het quotient een vierkant, welks wortel zoo veel bedraagt als de helft van het getal, dat den naam des veelhoekigen getals voorſtelt; doch zoo men het veelhoekig getal met deszelfs wortel vermenigvuldigt, zoo verkrijgt men een vierkant, welks wortel een veelhoekig getal is van half zoo veel zijden, en welks wortel dezelfde is als die van het oorſpronkelijk veelhoekig getal; men vraagt naar dit laatſte?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. JONKHEER *en* C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij de wortel van het veelhoekig getal x en de naam van den veelhoek $=2m$, dan is het getal, volgens de bekende formule,

$$\frac{(2m-2)x^2-(2m-4)x}{2}.$$

Volgens de eerſte voorwaarde des vraagſtuks hebben wij dan

$$\frac{(2m-2)x^2-(2m-4)x}{2x}=m^2,$$

of $(m-1)x-(m-2)=m^2$,

en $x=\frac{m^2+m-2}{m-1}=m+2 \ldots (1)$.

Volgens de tweede voorwaarde is

$\frac{(2m-2)x^2-(2m-4)x}{2}x=\left\{\frac{(m-2)x^2-(m-4)x}{2}\right\}^2$,

of $4(m-1)x-4(m-2)=\{(m-2)x-(m-4)\}^2$;

voor x zijne waarde uit (1) gesteld, geeft

$4(m-1)(m+2)-4(m-2)=\{(m-2)(m+2)-(m-4)\}^2$,

en door ontwikkeling $4m^2=\{m^2-m\}^2$,

en dus $2=m-1$,

of $m=3$,

waardoor men voor den wortel vindt

$x=5$,

en voor het gevraagde getal 45, hetwelk dan een zeshoekig getal is.

XXXIV. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Wanneer men de termen eener rekenkunstige reeks met de overeenkomstige termen eener meetkunstige reeks van hetzelfde aantal termen vermenigvuldigt, zoo ontstaat er eene reeks, wier som men vraagt?

Opgelost *door* J. Bassan *en* J. Jonkhert.

Oplossing *van* J. Bassan.

Laten de beide reeksen zijn

$a, a+b, a+2b \ldots a+(n-1)b$

en $c \quad cd \quad cd^2 \quad \ldots \quad cd^{n-1}$

dan is de reeks, welker som men vraagt,

$ac, (a+b)cd, (a+2b)cd^2 \ldots (a+(n-1)b)cd^{n-1}$

Deze reeks kan men in de twee volgende verdeelen

$ac, acd, acd^2 \ldots acd^{n-1}$

en $bcd, 2bcd^2 \ldots (n-1)bcd^{n-1}$.

De som S' der eerste reeks is bijkbaar

$S'=ac(1+d+d^2 \ldots d^{n-1})=ac\frac{d^n-1}{d-1} \ldots (\alpha)$.

De

De tweede reeks kan geschreven worden

$$bcd(1+2d+3d^2+\ldots(n-1)d^{n-2}) \quad \ldots \quad (\beta).$$

De tweede factor derzelve kan nu in de volgende reeksen verdeeld worden

$$\begin{array}{l} 1+d+d^2+d^3 \ldots d^{n-1} \\ d+d^2+d^3 \ldots d^{n-2} \\ d^2+d^3 \ldots d^{n-3} \\ \vdots \quad \vdots \\ d^{n-1} \end{array}$$

elke dezer reeksen kunnen door de gewone regels voor de meetkunstige reeksen gevonden worden; en men heeft dus voor de geheele som derzelve

$$\frac{d^{n-1}-1}{d-1}+\frac{d^{n-1}-d}{d-1}+\frac{d^{n-1}-d^2}{d-1}+\ldots\frac{d^{n-1}-d^{(n-1)}-1}{d-1}.$$

Deze reeks $n-1$ termen hebbende, zoo is derzelver som

$$(n-1)\frac{d^{n-1}}{d-1}-\frac{d^{n-1}+1}{(d-1)^2}=\frac{(n-1)(d-1)d^{n-1}-d^{n-1}+1}{(d-1)^2}$$

$$=\frac{(n-1)d^n-nd^{n-1}+1}{(d-1)^2}$$

Wij hebben dus voor de som $S^{\prime}$ der reeks (β)

$$S^{\prime}=\frac{bcd}{(d-1)^2}\left\{(n-1)d^n-nd^{n-1}+1\right\},$$

en alzoo door bijvoeging der som $S^{\prime}$ uit (α) de geheele gevraagde som S

$$S=ac\frac{d^n-1}{d-1}+\frac{bcd}{(d-1)^2}\left\{(n-1)d^n-nd^{n-1}+1\right\}.$$

Stelt men bij voorbeeld de reeksen 5, 12, 19, 26 en 2, 6, 18, 54, waarin dus $a=5$, $b=7$, $c=2$, $d=3$ en $n=4$ is, dan vindt men $S=1826$.

XXXV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Gegeven zijnde de vergelijkingen $x+y+z=a$, $y+z+v=b$,

$z+v+w=c$, $v+w+x=d$ en $w+x+y=e$, zoo vraagt men v, w, x, y en z te bepalen?

Opgelost *door* G. Brandsteder, J. Bassan, J. Jonkhert, E. Olivier Dz., C. F. Julius, H. Strootman, W. J. C. Rammelman Elsevier *en* B. G. van Kell.

Oplossing *van* G. Brandsteder.

De gegevene vergelijkingen

$$x+y+z=a,$$
$$y+z+v=b,$$
$$z+v+w=c,$$
$$v+w+x=d,$$
$$w+x+y=e$$

opteilende, vindt men

$$3(v+w+x+y+z)=a+b+c+d+e$$

of

$$v+w+x+y+z=\frac{a+b+c+d+e}{3};$$

van deze vergelijking elk der gegevene achtervolgens aftrekkende, vindt men

$$v+w=\frac{a+b+c+d+e}{3}-a$$
$$w+x=\frac{a+b+c+d+e}{3}-b$$
$$x+y=\frac{a+b+c+d+e}{3}-c$$
$$y+z=\frac{a+b+c+d+e}{3}-d$$

en

$$v+z=\frac{a+b+c+d+e}{3}-d$$

Trekt men nu weder elk dezer vergelijkingen af van die der gegevene, waarin dezelfde onbekende voorkomen, dan vindt men

$$v=b+d-\frac{a+b+c+d+e}{3},$$
$$w=c+e-\frac{a+b+c+d+e}{3},$$
$$x=d+a-\frac{a+b+c+d+e}{3},$$

$y=$

$$y = e + b - \frac{a+b+c+d+e}{3},$$

en

$$z = a + c - \frac{a+b+c+d+e}{3}.$$

Nemende ter toepassing $a = 20$, $b = 26$, $c = 32$, $d = 29$ en $e = 25$, dan is $\frac{1}{3}(a+b+c+d+e) = 44$, en dus $y = 11$, $w = 13$, $x = 5$, $y = 7$ en $z = 8$.

XXXVI. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Er is eene meetkunstige reeks van een oneven aantal termen; indien men den eerſten term bij den middelſten voegt, komt er 56; *de ſom van den laatſten en middelſten is* 1512, *en eindelijk is de ſom der reeks verminderd met* 2183, *gelijk aan de rede der reeks. Men vraagt naar deze reeks?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, E. OLIVIER Dz., H. STROOMAN, C. F. JULIUS, J. BASSAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Den eerſten term der gevraagde reeks $= x$ ſtellende, zoo is de middelſte term $= 56 - x$, en de laatſte $1456 + x$, en daar de middelſte middenevenredig tuſſchen de uiterſten is, hebben wij dadelijk de vergelijking

$$x(1456 + x) = (56 - x)^2,$$

waaruit men vindt $1568x = 3136$,

of $x = 2$.

Stelt men nu de rede der reeks $= y$, dan heeft men volgens de bekende regels

$$2183 + y = \frac{1458y - 2}{y - 1},$$

of $2182y + y^2 - 2183 = 1458y - 2$,

of ook $y^2 + 724y = 2181$,

waaruit $y = -362 \pm 365$.

Alleen de poſitieve waarden van y nemende, komt er $y = 2$; de bedoelde reeks is dus 2, 6, 18, 54, 162, 486 en 1458, wier ſom is 2186.

XXXVII. VOORSTEL.

Door H. STROOTMAN.

Men vraagt naar de waarden van x en y uit de vergelijkingen $15y^2-(19x+26)y+6x^2+17x+7=0$ *en* $x^2-3xy+y^2+5x+7+103=0$? (*)

OPGELOST *door* H. STROOTMAN, J. JONKHERT, C. F. JULIUS en J. BASSAN.

OPLOSSING *van* H. STROOTMAN.

Men kan de eerste vergelijking aldus schrijven

$$y^2-\frac{19x+26}{15}y=-\frac{6x^2+17x+7}{15},$$

hieruit y oplossende, vindt men, na herleiding,

$$y=\frac{19x+26}{30}\pm\frac{x-16}{30},$$

de twee waarden van y zijn dan

$$y=\frac{38x+42}{30}=\frac{3x+7}{5} \quad \ldots\ldots (1),$$

en

$$y=\frac{20x+10}{30}=\frac{2x+1}{3} \quad \ldots\ldots (2).$$

Stellende nu eerst de waarde van y uit (1) in de tweede der gegevene vergelijkingen, dan komt er na herleiding

$$x^2=9\tfrac{1}{2}x-186\tfrac{1}{2}=0,$$

waaruit wederom gevonden wordt,

$$x=19 \text{ en } x=-9\tfrac{1}{2},$$

en dus $y=13$ en $y=-6\tfrac{1}{2}$.

Stelt men de waarde (2) voor y in de gegevene vergelijking, dan vindt men op dezelfde wijze

$$x=3\tfrac{1}{2}+5\sqrt{10\tfrac{7}{44}} \text{ en } x=3\tfrac{1}{2}-5\sqrt{10\tfrac{7}{44}},$$

alsmede $y=3\tfrac{1}{2}+3\sqrt{10\tfrac{7}{44}}$ en $y=3\tfrac{1}{2}-3\sqrt{10\tfrac{7}{44}}$.

XXXVIII. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK ROELDZ.

Aan de vergelijking $9x-\frac{2\partial y}{\partial x}(\sqrt{(9x^2+xy^2+1)}-2y)=0$ *voldoet* $4y=1-9x^2$; *men vraagt of deze vergelijking eene algemeene of bijzondere integraal voorstelt?*

OP-

(*) J. DE GELDER, *Stelkunst*, bl. 235.

Oplossing van J. van Wijk. Roeldz.

In de gegevene vergelijking $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ stellende en het wortelteeken wegmakende, komt er

$$(9x+4py)^2 = 4p^2(9x^2+xy^2+1),$$

dezelve ontwikkelende, en alle de termen in het eerste lid brengende, heeft men

$$81x^2 - 36p^2x^2 + 72pyx - 4xy^2p^2 + 16p^2y^2 - 4p^2 = 0.$$

Deze vergelijking wederom differentierende door ∂x, deelende in $\frac{\partial p}{\partial x} = q$ stellende, komt er na herleiding

$$162x - 72x^2pq + 72py + 72xyq + 4y^2p^2 + 8ypx + 8xy^2pq + 32yp^2 + 32y^2pq - 8pq = 0 \quad . \quad (\alpha),$$

Zoo nu deze vergelijking in twee factoren kan ontbonden worden, de eene q bevattende en de andere zonder q, dan bestaat er eene bijzondere integraal (J. de Gelder, *Different. Rekening*, I. 409). Omdat q slechts in de eerste magt voorkomt, kunnen de beide factoren algemeen onder den vorm $(nq+m)s$ voorgesteld worden, en uit de vergelijking dezer uitdrukking met (α) ziet men, dat

$$ns = 8(9xy - 9x^2p + xy^2p + 4y^2p - p) \quad . \quad (\beta),$$

moet wezen, en

$$ms = 2(81x + 36py + 2y^2p^2 + 4yxp^2 + 16yp^2) \quad . \quad (\gamma).$$

Zoekt men nu volgens de bekende regels, of de uitdrukkingen (β) en (γ) eenen gemeenen deeler hebben, dan vindt men slechts den factor 2, welke hier niet in aanmerking komt. Men moet dus $s = 1$ nemen, en dienvolgens kan de vergelijking (α) niet in twee factoren ontbonden worden, en er bestaat alzoo geene bijzondere integraal.

Het kan nu nog gebeuren, dat er eene bijzondere waarde voor x en y als bijzondere integraal kan beschouwd worden; alsdan moeten deze waarden de waarde van $\frac{\partial y}{\partial x}$ onbepaald of $\frac{0}{0}$ maken. (de Gelder, *Different. Rek.* I. 415). Nu is

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{9x}{2(\sqrt{(9x^2+xy^2+1)} - 2y)},$$

Stelt

Stelt men nu $x = o$, dan wordt de noemer $2(-2y+1)$, en in de algemeene integraal $x = o$ ſtellende, komt er $y = \frac{1}{2}$, welke waarde de noemer niet $= o$ maakt. Er beſtaan alzoo ook geene bijzondere waarden, welke als bijzondere integralen kunnen beſchouwd worden.

XXXIX. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Wanneer men om eenen bolvormigen driehoek eenen cirkel beſchrijft, dan vraagt men uit de zijden van den driehoek den bolvormigen ſtraal van dezen cirkel te vinden?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Laat ABC (*Fig.* 20) de voorgeſtelde driehoek zijn, en D het middelpunt van den omgeſchreven cirkel, de bogen AD, BD en CD zijn dan de gevraagde ſtralen. Trekt men nu de bogen ED, FD loodregt op CB en CA, dan deelen zij deze bogen midden door; zij verder $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $CD = x$, hoek $BCD = \phi$ en $DCA = \psi$, dan hebben wij uit de regthoekige driehoeken ECD en DCF

$$Tang.\, x = \frac{Tang.\, \frac{1}{2}a}{Cos.\, \phi} = \frac{Tang.\, \frac{1}{2}b}{Cos.\, \psi},$$

en dus $$Cos.\, \phi = \frac{Tang.\, \frac{1}{2}a}{Tang.\, \frac{1}{2}b}\, Cos.\, \psi,$$

waarvoor wij ſtellen $Cos.\, \phi = n\, Cos.\, \psi$ . . . . . (1).

Uit den driehoek ABC hebben wij nu nog

$$Cos.\, (\psi + \phi) = \frac{Cos.\, c - Cos.\, a\, Cos.\, b}{Sin.\, a\, Sin.\, b},$$

waarvoor wij ſtellen

$$Cos.\, (\psi + \phi) = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Deze vergelijking ontwikkelende en voor ϕ zijne waarde uit (1) ſtellende, komt er

$$n\, Cos^2.\, \psi - Sin.\, \psi \sqrt{(1 - n^2\, Cos^2.\, \psi)} = m,$$

het wortelteeken verdrijvende, vindt men

$$m^2 - 2\, m\, n\, Cos^2.\, \psi = 1 - n^2\, Cos^2.\, \psi - Cos^2.\, \psi,$$

en dus $$Cos^2.\, \psi = \frac{m^2 - 1}{2\, m\, n - n^2 - 1},$$

waar-

waarin nu voor x en m hunne waarden moeten gesteld worden.

Nu is $$m^2 - 1 = \frac{(Cos.c - Cos.a\,Cos.b)^2}{Sin^2\,a\,Sin^2.b} - 1$$
$$= \frac{Cos^2.c - 1 + Cos^2.a + Cos^2.b - 2\,Cos.a\,Cos\,b\,Cos.c}{Sin^2.a\,Sin^2.b}.$$

Verder
$$2mn - n^2 - 1 = \frac{2(Cos.c - Cos.a\,Cos.b)}{Sin.a\,Sin.b} \times \frac{Tang.\frac{1}{2}a}{Tang.\frac{1}{2}b} - \frac{Tang^2.\frac{1}{2}a}{Tang^2.\frac{1}{2}b} - 1$$
$$= \frac{Cos.c - Cos.a\,Cos.b}{2\,Sin^2.\frac{1}{2}b\,Cos^2.\frac{1}{2}a} - \frac{Tang^2.\frac{1}{2}a}{Tang^2.\frac{1}{2}b} - 1$$
$$= \frac{Cos.c - Cos\,a\,Cos\,b - 2\,Sin^2.\frac{1}{2}a\,Cos^2.\frac{1}{2}b - 2\,Sin^2.\frac{1}{2}b\,Cos^2\frac{1}{2}a}{2\,Sin^2\,\frac{1}{2}b\,Cos^2.\frac{1}{2}a}$$
$$= \frac{Cos.c - Cos.a\,Cos.b - Sin^2.\frac{1}{2}a(1 + Cos.b) - Cos^2.\frac{1}{2}a(1 - Cos.b)}{2\,Sin^2.\frac{1}{2}b\,Cos^2.\frac{1}{2}a}$$
$$= \frac{Cos.c - 2\,Cos.a\,Cos.b - 1}{2\,Sin^2.\frac{1}{2}b\,Cos^2.\frac{1}{2}a},$$

dus
$$Cos^2.\psi = \frac{2(1 + Cos^2.c + Cos^2.a + Cos^2.b - 2\,Cos.a\,Cos\,b\,Cos.c)\,Sin^2.\frac{1}{2}b\,Cos^2\frac{1}{2}a}{Sin^2.a\,Sin^2.b\,(Cos.c - 2\,Cos.a\,Cos.b - 1)}$$

en
$$z^2 = \frac{Tang^2.\frac{1}{2}b}{Cos^2.\psi}$$
$$= \frac{Sin^2.a\,Sin^2.b\,(Cos.c - 2\,Cos.a\,Cos.b - 1)}{2\,(1 + Cos^2.c + Cos^2.a + Cos^2.b - 2\,Cos.a\,Cos.b\,Cos.c)\,Cos^2.\frac{1}{2}b\,Cos^2\frac{1}{2}a}$$
$$= \frac{8\,Sin^2.\frac{1}{2}a\,Sin^2.\frac{1}{2}b\,(Cos.c - 2\,Cos.a\,Cos.b - 1)}{1 + Cos^2.c + Cos^2.a + Cos^2.b - 2\,Cos.a\,Cos.b\,Cos.c}.$$

XL. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Van eenen bolvormigen driehoek is gegeven de middellijn des ingeschreven' cirkels, de som der zijden en eenen hoek; men vraagt hierdoor den driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Zij ABC (*Fig.* 21) wederom de voorgestelde driehoek, waarin BAC $= x$ gegeven, de zijden AB $= x$, AC $= y$, BC $= z$ en a de middellijn van den ingeschreven' cirkel; wij mogen dan stellen $x + y + z = s$. In Voorstel 202 van het 3de Deel der *Verzameling van Wiskundige Voorstellen* is reeds bewezen

$Tang^2.$

is, zoo is $Tang.\,\Phi = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b}$.

Uit den regthoekigen driehoek ADE volgt verder

$$AE = y = b\,Tang.\,(\alpha - \Phi),$$

maar nu is $Tang.\,(\alpha - \Phi) = \frac{Tang.\,\alpha - Tang.\,\Phi}{1 + Tang.\,\alpha\ Tang.\,\Phi}$,

en hierin de waarde van $Tang.\,\Phi$ gesteld, heeft men

$$Tang.\,(\alpha - \Phi) = \frac{b\ Tang.\,\alpha - \sqrt{(a^2 - b^2)}}{b + Tang.\,\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}},$$

waaruit volgt $y = b\frac{b\ Tang.\,\alpha - \sqrt{(a^2 - b^2)}}{b + Tang.\,\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}}$,

en dus $AB = y + z = b\frac{b\,Tang.\,\alpha - \sqrt{(a^2 - b^2)}}{b + Tang.\,\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}} + \sqrt{(a^2 - b^2)}$

$$= \frac{Tang.\,\alpha(b^2 + a^2 - b^2)}{b + Tang.\,\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}}$$

$$= \frac{a^2\,Tang.\,\alpha}{b + Tang.\,\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}}.$$

Verder is $c^2 x^2 = b^2 + y^2$,

en dus $x = \frac{1}{c}\sqrt{(b^2 + y^2)}$,

waarin voor y zijne waarde gesteld, geeft

$$x = \frac{1}{c} \times \frac{\sqrt{\{b^2\,(b + Tang.\,\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)})^2 + a^4\,Tang^2.\,\alpha\}}}{b + a\,Tang.\,\alpha\sqrt{(a^2 - b^2)}}.$$

Voor de derde zijde BC heeft men uit den driehoek DBC

$$BC = \sqrt{(a^2 + x^2 + 2\,a\,x\,Cos.\,\alpha)},$$

waarin voor x zijne waarde kan gesteld worden.

XXXII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Indien de som van eene harmonische reeks van viet termen een kwadraat is, en de wortel van hetzelve gelijk is dan het rekenkundige midden tusschen de middelste termen van de harmonische reeks, dan vraagt men dezelve te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, C. F. JULIUS *en* J. JONKHEER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Wanneer men voor den tweeden en derden term der reeks neemt

$x - y$

$x-y$ en $x+y$, dan is de eerſte term $\frac{x^2-y^2}{x+3y}$, en de laatſte $\frac{x^2-y^2}{x+3y}$, en derhalve heeft men volgens het voorſtel

$$\frac{x^2-y^2}{x+3y}+2x\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x-3y}}=x^2,$$

of wel $2x(x^2-y^2)+2x(x^2-9y^2)=x^2(x^2-9y^2)$,

waaruit volgt $4(x^2-5y^2)=x(x^2-9y^2)$,

en dus $$y^2=\frac{x^2(x-4)}{9x-20}.$$

Zal nu deze uitdrukking rationale waarden voor y geven, dan moet

$$\frac{x-4}{9x-20}=p^2$$

geſteld kunnen worden; uit deze vergelijking volgt dan

$$x=\frac{20p^2-4}{9p^2-1},$$

waarin nu voor p elk willekeurig getal mag genomen worden: Voor $p=\frac{1}{3}$ wordt $x=\frac{1}{3}$ en $y=1$ en dus de reeks 3, 4, 6 en 12.

XXXIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men een zeker veelhoekig getal door zijnen wortel deelt, dan is het quotient een vierkant, welks wortel zoo veel bedraagt als de helft van het getal, dat den naam des veelhoekigen getals voorſtelt; doch zoo men het veelhoekig getal met deszelfs wortel vermenigvuldigt, zoo verkrijgt men een vierkant, welks wortel een veelhoekig getal is van half zoo veel zijden, en welks wortel dezelfde is als die van het oorſpronkelijk veelhoekig getal; men vraagt naar dit laatſte?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. JONKHEER *en* C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij de wortel van het veelhoekig getal x en de naam van den veelhoek $=2m$, dan is het getal, volgens de bekende formule,

$$\frac{(2m-2)x^2-(2m-4)x}{2}.$$

Volgens de eerſte voorwaarde des vraagſtuks hebben wij dan

$$\frac{(2m-2)x^2-(2m-4)x}{2x}=m^2,$$

of $(m-1)x-(m-2)=m^2$,

en $x=\frac{m^2+m-2}{m-1}=m+2 \ldots (1)$.

Volgens de tweede voorwaarde is

$\frac{(2m-2)x^2-(2m-4)x}{2}x=\left\{\frac{(m-2)x^2-(m-4)x}{2}\right\}^2$,

of $4(m-1)x-4(m-2)=\{(m-2)x-(m-4)\}^2$;

voor x zijne waarde uit (1) gefteld, geeft

$4(m-1)(m+2)-4(m-2)=\{(m-2)(m+2)-(m-4)\}^2$,

en door ontwikkeling $4m^2=\{m^2-m\}^2$,

en dus $2=m-1$,

of $m=3$,

waardoor men voor den wortel vindt

$x=5$,

en voor het gevraagde getal 45, hetwelk dan een zeshoekig getal is.

XXXIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men de termen eener rekenkunstige reeks met de overeenkomstige termen eener meetkunstige reeks van hetzelfde aantal termen vermenigvuldigt, zoo ontstaat er eene reeks, wier som men vraagt?

OPGELOST *door* J. BASSAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten de beide reeksen zijn

$a, a+b, a+2b \ldots a+(n-1)b$

en $c \quad cd \quad cd^2 \quad \ldots \quad cd^{n-1}$

dan is de reeks, welker som men vraagt,

$ac, (a+b)cd, (a+2b)cd^2 \ldots (a+(n-1)b)cd^{n-1}$

Deze reeks kan men in de twee volgende verdeelen

$ac, acd, acd^2 \ldots acd^{n-1}$

en $bcd, 2bcd^2 \ldots (n-1)bcd^{n-1}$;

De som S' der eerfte reeks is blijkbaar

$S'=ac(1+d+d^2 \ldots d^{n-1})=ac\frac{d^n-1}{d-1} \ldots (\alpha)$.

De

De tweede reeks kan geſchreven worden

$$bcd(1+2d+3d^2+\ldots(n-1)d^{n-2}) \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$

De tweede factor derzelve kan nu in de volgende reekſen verdeeld worden

$$\begin{array}{l} 1+d+d^2+d^3 \ldots d^{n-2} \\ d+d^2+d^3 \ldots d^{n-2} \\ d^2+d^3 \ldots d^{n-2} \\ \vdots \quad \vdots \\ d^{n-2} \end{array}$$

elke dezer reekſen kunnen door de gewone regels voor de meetkunstige reekſen gevonden worden; en men heeft dus voor de geheele ſom derzelve

$$\frac{d^{n-1}-1}{d-1}+\frac{d^{n-1}-d}{d-1}+\frac{d^{n-1}-d^2}{d-1}+\ldots\frac{d^{n-1}-d^{(n-1)-1}}{d-1}.$$

Deze reeks $n-1$ termen hebbende, zoo is derzelver ſom

$$(n-1)\frac{d^{n-1}}{d-1}-\frac{d^{n-1}+1}{(d-1)^2}=\frac{(n-1)(d-1)d^{n-1}-d^{n-1}+1}{(d-1)^2}$$

$$=\frac{(n-1)d^n-nd^{n-1}+1}{(d-1)^2}$$

Wij hebben dus voor de ſom S'' der reeks (β)

$$S''=\frac{bcd}{(d-1)^2}\left\{(n-1)d^n-nd^{n-1}+1\right\},$$

en alzoo door bijvoeging der ſom S' uit (α) de geheele gevraagde ſom S

$$S=ac\frac{d^n-1}{d-1}+\frac{bcd}{(d-1)^2}\left\{(n-1)d^n-nd^{n-1}+1\right\}.$$

Stelt men bij voorbeeld de reekſen 5, 12, 19, 26 en 2, 6, 18, 54, waarin dus $a=5$, $b=7$, $c=2$, $d=3$ en $n=4$ is, dan vindt men $S=1826$.

XXXV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Gegeven zijnde de vergelijkingen $x+y+z=a$, $y+z+v=b$,

vervalt ook dit keerpunt, en de tak $Q'OQ''$ nadert meer naar den vorm van den eerſten tak.

XLII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt de waarde te vinden van de uitdrukking $\frac{a+bnx^2}{xe^{bnx}+b}$ *als* x *oneindig wordt?*

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN. *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

De voorgeſtelde breuk kan geſchreven worden onder den vorm

$$\frac{a}{xe^{bnx}+b}+\frac{bnx^2}{xe^{bnx}+b}.$$

De eerſte term is blijkbaar $=0$ als x oneindig wordt; de tweede blijft dan nog te onderzoeken. Daartoe voor de exponentiale grootheid derzelver ontwikkeling in de bekende reeks ſtellende, komt er

$$\frac{bnx^2}{b+1+bnx+\frac{1}{2}b^2n^2x^2+\frac{1}{6}b^3n^3x^3+enz.};$$

teller en noemer door x^2 deelende, verandert dezelve in

$$\frac{bn}{\frac{b}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{bn}{x}+\frac{1}{2}b^2n^2+\frac{1}{6}b^3n^3x+enz.}$$

voor x oneindig wordt dan de noemer oneindig en alzoo de breuk $=0$, en daar dus de beide deelen, waarin het voorgeſtelde gebroken verdeeld was, $=0$ zijn, is dan ook voor x oneindig de geheele breuk $=0$.

XLIII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Van eenen vierhoek zijn drie zijden gegeven; men vraagt naar den vierhoek, welke met deze zijden den grootſten inhoud zal hebben?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN. *en* J. JONKHART.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Zij ABCD (*Fig.* 23) de gevraagde vierhoek, waarin $AD=a$, $DC=b$ en $BC=c$ gegeven is; ſtellen wij verder hoek $ADC=\phi$ en $BCD=\psi$, dan zal de inhoud van den vierhoek, na het trek-

ken

ken der loodlijnen AE en BF, gemakkelijk gevonden worden uit de uitdrukking

$$\begin{aligned} I &= drieh.\,ADE + drieh.\,BFC + Trap.\,AEFB \\ &= \tfrac{1}{2}AE.DE + \tfrac{1}{2}(AE+BF)\,EF + \tfrac{1}{2}BF.FC \\ &= \tfrac{1}{2}AE.DE + \tfrac{1}{2}(AE+BF)\,(DC-DE-FC) + \tfrac{1}{2}BF.FC \\ &= \tfrac{1}{2}AE\,(DC-FC) + \tfrac{1}{2}BF\,(DC-DE) \\ &= \tfrac{1}{2}a\,Sin.\phi\,(b - c\,Cos.\psi) + \tfrac{1}{2}c\,Sin.\psi\,(b - a\,Cos.\phi) \\ &= \tfrac{1}{2}ab\,Sin.\phi + \tfrac{1}{2}cb\,Sin.\psi - \tfrac{1}{2}ac\,Sin.)\,\phi+\psi) \end{aligned}$$

Deze vergelijking twee veranderlijke grootheden bevattende, zoo differentieren wij ten opzigte van elk derzelve, en alsdan de differentiaal quotienten gelijk nul ſtellende, hebben wij ter bepaling der hoeken ϕ en ψ de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} b\,Cos.\phi - c\,Cos.(\phi+\psi) &= 0 \\ \text{en} \qquad b\,Cos.\psi - a\,Cos.(\phi+\psi) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Waaruit nu de hoeken ϕ en ψ moeten gevonden worden; door de eerſte met a en de tweede met c te vermenigvuldigen, en de producten af te trekken, vindt men

$$a\,Cos.\phi = c\,Cos\,\psi \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

hetwelk aanwijst, dat de ſtukken DE en FC aan elkander gelijk moeten zijn. Verder volgt uit de eerſte vergelijking na ontwikkeling en deeling door $Cos.\phi$

$$b - c\,(Cos.\psi - Sin.\psi\,Tang.\phi) = 0,$$

of

$$Tang.\phi = \frac{c\,Cos.\psi - b}{c\,Sin.\psi},$$

en hierin de vergelijking (2) gebruikende

$$Tang.\phi = \frac{a\,Cos.\phi - b}{\sqrt{(c^2 - a^2\,Cos^2.\phi)}},$$

of $(c^2 - a^2\,Cos^2.\phi)\,Tang^2.\phi = (a\,Cos.\phi - b)^2,$

en $c^2\,Tang^2.\phi - a^2 = b^2 - 2\,ab\,Cos.\phi,$

dus $c\,Tang.\phi = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2\,ab\,Cos.\phi)}.$

Het tweede lid dezer vergelijking is de waarde der diagonaal AC, maakt men dus $DA' = CB = c$ en trekt de loodlijn EA', dan moet $EA' = AC$ zijn.

Uit de voorlaatſte vergelijking heeft men verder

$$c^2\,(1 - Cos^2\,\phi) = (a^2 + b^2)\,Cos^2.\phi - 2\,ab\,Cos^2.\phi,$$

of

$$Cos^2.\phi - \frac{a^2+b^2+c^2}{2\,ab}\,Cos^2.\phi - \frac{c^2}{2\,ab} = 0,$$

$$OZ = \frac{m\int p x^{n}.y\partial x}{\int p x^{n}.my\partial x} = \frac{\int x^{\frac{1}{2}}\partial x}{\int x^{\frac{1}{2}}\partial x}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C'}$$

voor $x = o$, het moment en de inhoud $= o$ zijnde, zoo zijn c en $c' = o$, en voor de lengte $OH = h$ is dus

$$OZ = \tfrac{2}{3}h.$$

Omdat nu QR eene raaklijn is, zoo moet ZI de normaal der krom-me wezen, en derhalve

$$OZ = x + \tfrac{1}{2}p = \tfrac{2}{3}h,$$

of $$x = \tfrac{2}{3}h - \tfrac{1}{2}p,$$

en $$y = \sqrt{p(\tfrac{2}{3}h - \tfrac{1}{2}p)},$$

zoo dat men voor den hoek OQI heeft

$$Tang.\,OQI = \frac{y}{2x} = \frac{\sqrt{p(\frac{2}{3}h - \frac{1}{2}p)}}{2(\frac{2}{3}h - \frac{1}{2}p)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{(\frac{2}{3}h - \frac{1}{2}p)}}.$$

XLVI. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Men vraagt de vergelijking $x^{x}(x^{x}+y^{x})\partial x + xy^{x-1}(y^{x}-x^{x})\partial y = \partial x.x^{x}y^{x}\,N.Log.\frac{y}{x} - (x^{2x}\,N.Log.x + y^{2x}\,N.Log.y)\partial x$ *te integreren?*

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Men kan de opgegevene vergelijking aldus schrijven:

$$x^{2x}(1+Log.x)\partial x + x^{x}y^{x}(1+Log.x)\partial x = x^{x}y^{x}$$
$$(\partial x\,Log.y + \frac{x}{y}\partial y) - y^{2x}(\partial x\,Log.y + \frac{x}{y}\partial y).$$

Stelt men hierin $x^{x} = u$ en $y^{x} = v$, dan komt er

$$\partial u = x^{x}(1+Log.x)\partial x,$$

en $$\partial v = y^{x}(\frac{x}{y}\partial y + \partial x\,Log.y).$$

Hierdoor wordt de voorgestelde vergelijking

$$u\partial u$$

$$u\partial u + v\partial u = u\partial v - v\partial v.$$

Stelt men nu $v = mu$ dan verandert dezelve in

$$u\partial u + mu\partial u = u\partial m + mu\partial u - mu(m\partial u + u\partial m),$$

of $$\partial u = u\partial m - m^2\partial u - mu\partial m,$$

en $$\partial u(1+m^2) = u(1-m)\partial m,$$

dus $$\frac{\partial u}{u} = \frac{1-m}{1+m^2}\partial m,$$

en $$Log.u = Boog\,Tang.\,m - \tfrac{1}{2}Log.(1+m^2) + C,$$

of daar $m = \frac{v}{u}$,

$$Log.u = Boog\,Tang.\frac{v}{u} - \tfrac{1}{2}Log.\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right) + C,$$

of $$Boog.\,Tang.\frac{v}{u} = \tfrac{1}{2}Log.(u^2+v^2) + C.$$

Voor u en v hunne waarde ſtellende, heeft men

$$Boog\,Tang.\left(\frac{y}{x}\right)^x - \tfrac{1}{2}Log.(x^{2x}+y^{2y}) + C = 0.$$

XLVII. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Men vraagt de vergelijking $Sin.y\partial x\,Log.Tang.x + Cos.x\,Sin.x\,Cos.y\partial y = Sin.y\partial x\,Log.Cosec.y$ *te integreren?*

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Wij ſchrijven voor de opgegevene vergelijking

$$Sin.y(Log.Tang.x - Log.Cosec.y)\partial x = -Cos.x\,Sin.x\,Cos.y\partial y,$$

en deelende door $Cos^2.x\,Sin^2.y$, zoo komt er

$$Cosec.y\,Sec^2.x(Log.Tang.x - Log.Cosec.y)\partial x = Tang.x\frac{Cos.y}{Sin^2.y}\partial y.$$

Stellende nu $Tang.x = u$,

en $Cosec.y = v$,

dan wordt

$$\partial u = \frac{\partial x}{Cos^2.x} \quad \text{en} \quad \partial v = -\frac{Cos.y}{Sin^2.y}\partial y,$$

en de vergelijking verandert in

$$v(Log.u - Log.v)\partial u = u\partial v,$$

of $$v\partial u\,Log.\frac{u}{v} = u\partial v.$$

Stel-

Stellende wederom $v = mu$, dan verkrijgt men

$$-mu\partial u\,Log.\,m = u(m\partial u + u\partial m),$$

of $$mu\partial u + u\partial m + m\partial u\,Log.\,m = 0,$$

dus $$(m + m\,Log.\,m)\partial u = -u\partial m,$$

en $$-\frac{\partial m}{m\,Log.\,m + m} = \frac{\partial u}{u} = -\frac{\partial m}{m} \times \frac{1}{Log.\,m + 1}$$

$$= -\frac{\partial Log.\,m}{Log.\,m + 1},$$

de integraal is dus

$$Log.\,u = -Log.(1 + Log.\,m) \times C,$$

of $$u = \frac{1}{(1 + Log.\,m)C},$$

voor u zijne waarde gesteld, komt er

$$1 = uC\left(1 + Log.\frac{v}{m}\right)$$

$$1 = Tang.\,x\,C\,(1 + Log.\,Cosec.\,y\,Cot.\,x)\,Tang.\,x.$$

XLVIII. VRAAGSTUK.

Door C. F. Julius.

Iemand wint jaarlijks a guldens en verteert er b, het te kort vult hij aan door den interest van een kapitaal van c, dat tegen d ten honderd 's jaars uitstaat, zoo nu de interest niet toereikende is om het te kort aan te vullen en dus jaarlijks een deel der hoofdsom moet gebruikt worden, vraagt men na hoe veel jaren hij niets zal bezitten?

Opgelost *door* C. F. Julius, H. Strootman, J. Jonkhert *en* J. Bassan.

Oplossing *van* C. F. Julius.

De interest en het kapitaal c zal aan het einde des eersten jaars bedragen $\frac{c(100+d)}{100}$,

want $$100 : 100 + d = c : \frac{c(100+d)}{100}.$$

Hiervan het verschil $b - a = g$ van de vertering boven de verdienste afgetrokken, laat aan het einde des eersten jaars een kapitaal over van

$$\frac{c(100+d)}{100} - g,$$

waar-

waarbij gevoegd de interest aan het einde des tweeden jaars geeft voor kapitaal na aftrek van het te veel verteerde

$$\frac{100+d}{100}\left\{\frac{c(100+d)}{100}-g\right\}-g=\left(\frac{100+d}{100}\right)^2 c-\frac{100+d}{100}g-g.$$

Aan het einde van het derde jaar zal men overhouden

$$\left(\frac{100+d}{100}\right)^3 c-\left(\frac{100+d}{100}\right)^2 g-\left(\frac{100+d}{100}\right)g-g,$$

en dus op het einde van x jaren

$$\left(\frac{100+d}{100}\right)^x c-\left(\frac{100+d}{100}\right)^{x-1} g \ldots\ldots\ldots -g.$$

Stelt men $\frac{100+d}{100}=n$, dan wordt de reeks

$$n^x c-(n^{x-1}+n^{x-2}+\ldots 1)g,$$

en daar nu na x jaren de geheele som $=0$ moet zijn, zullen wij hebben

$$n^x c-g(n^{x-1}+n^{x-2}+\ldots 1)=0,$$

en daar de factor van den tweeden term in het eerste lid eene meetkunstige reeks is, zoo heeft men

$$n^x c-g\frac{n^x-1}{n-1}=0,$$

waaruit volgt $(n-1)cn^x=g(n^x-1)$,

of $n^x((n-1)c-g)=-g$,

en $n^x=\frac{g}{g-(n-1)c}$,

derhalve $x\,Log.\,n=Log.\,g-Log.(g-(n-1)c)$,

en $x=\frac{Log.\,g-Log.(g-(n-1)c)}{Log.\,n}$.

Ter toepassing zij $a=2000$, $b=3000$, $c=12000$ en $d=5$, dan is $n=1,05$, $g=1000$, en daaruit volgt

$$x=\frac{3-2,6020600}{0,0211893}=19 \text{ jaren nagenoeg.}$$

XLIX. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

Iemand wint jaarlijks a guldens en verteert er b, het te kort

vult hij aan uit den interest van een kapitaal c, rentende d ten honderd, het overschot dezer interest voegt hij jaarlijks bij zijn kapitaal, na hoe veel jaren zal zijn kapitaal c verdubbeld zijn?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. BASSAN, J. JONKHEBT *en* H. STROOTMAN.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Niets in de voorgaande oplossing voorkomende, waaruit blijkt dat het jaarlijksch overschot minder dan de jaarlijksche rente is, zoo kunnen dezelfde berekeningen ook hier dienen; met dit onderscheid, dat hier na het einde van x jaren het overblijvende kapitaal $2c$ zij; en hieruit volgt dan met bijbehouding der letters van de voorgaande oplossing

$$n^x c - g\frac{n^x - 1}{n-1} = 2c,$$

en dus $(n-1)n^x c - gn^x = 2c(n-1) - g,$

of $n^x = \frac{2c(n-1)-g}{c(n-1)-g},$

en verder $x = \frac{1}{Log.n} Log.\frac{2c(n-1)-g}{c(n-1)-g}.$

Zij wederom ter toepassing $a = 2000$, $b = 3000$, $c = 40000$ en $d = 5$, waardoor ook $n = 1{,}05$ en $g = 1000$ wordt, en dus

$$x = \frac{0{,}4771213}{0{,}0211893} = 22\frac{1}{2} \text{ jaar nagenoeg.}$$

L. VOORSTEL.

Door B. G. VAN KELL.

Drie personen bezitten ieder een zeker aantal guldens; zoo men het vierkant van het getal guldens van elk der twee eersten met 4 vermeerdert, komt er 17, maar het vierkant van het getal guldens van elk der beide laatsten ieder met 1 verminderende, zoo is het product des eersten 192; en het product uit het getal guldens van de drie personen 30 zijnde, zoo vraagt men naar ieders bezitting?

OPGELOST *door* B. G. VAN KELL, J. BASSAN, C. F. JULIUS, J. JONKHERT *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* B. G. VAN KELL.

Stellende de guldens van den eersten persoon x, van den tweeden

den y en van den derden z, dan heeft men naar aanleiding van het voorstel

$$x^2+y^2=17,\ (y^2-1)(z^2-1)=192,$$

en $$xyz=30;$$

de waarde van x uit deze laatste in de beide eersten overbrengende, komt er

$$\frac{900}{y^2z^2}+y^2=13 \text{ en } y^2z^2-y^2-z^2=191,$$

uit de eerste dezer vergelijkingen de waarde van z^2 in de tweede plaatsende, vindt men na behoorlijke rangschikking en herleiding

$$y^6+178y^4-1583y^2-900=0,$$

of $y^2=u$ nemende

$$u^3+178u^2-1583u-900=0,$$

waarvan $u=9$ een wortel is; deelende dan door $u-9$, dan komt er

$$u^2+187u+100=0,$$

waaruit volgt $u=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{(34569)}-187)$,

dus $$u=-0{,}535 \text{ en } u=-186{,}465,$$

beide waarden negatief zijnde, maken y onbestaanbaar, zoodat men alleen den wortel $u=9$ of $y=\pm 3$ kan gebruiken; deze waarden nu gevên

$$z=\frac{30}{y\sqrt{(13-y^2)}}=\pm 5;$$

en alzoo $$x=\frac{30}{yz}=2.$$

Bij gevolg bezit de eerste persoon 2, de tweede 3 en de derde 5 guldens, of wel de eerste 2 gulden, de tweede 3 gulden schuld en de derde 5 gulden schuld.

LI. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Van eene harmonische reeks van vier termen is de som der beide eersten 2a of 7, en die der beide laatsten 2b of 18, vrage naar deze reeks?

Oplossing *van* J. Bassan.

Laten de beide eerste termen der reeks zijn $a-x$ en $a+x$, dan is de derde term

$$\frac{a^2 - x^2}{a - 3x},$$

en de vierde

$$\frac{a^2 - x^2}{a - 5x},$$

aan de eerſte voorwaarde des voorſtels is dan reeds voldaan, terwijl de tweede geeft

$$\frac{a^2 - x^2}{a - 3x} + \frac{a^2 - x^2}{a - 5x} = 2b,$$

waaruit volgt

$$(a^2 - x^2)(a - 5x) + (a^2 - x^2)(a - 3x) = 2b(a - 3x)(a - 5x)$$

of $(a^2 - x^2)(a - 4x) = b(a^2 - 8ax + 15x^2)$;

of wel $x^3 - \frac{1}{4}(a + 15b)x^2 + x(2b - a)a = \frac{1}{4}a^2(b - a)$.

Hierin nu voor a en b hunne getallenwaarden ſtellende, komt er

$$x^3 - \frac{277}{2}x^2 + \frac{203}{4}x - \frac{539}{32} = 0 \quad \ldots \quad (a).$$

Deze vergelijking wordt voldaan door $x = \frac{1}{2}$ te ſtellen, en hieruit volgt, dat alzoo de termen der reeks zijn

$$x - a = 3, \quad x + a = 4, \quad \frac{x^2 - a^2}{a - 3x} = 6 \text{ en}$$

$$\frac{x^2 - a^2}{a - 5x} = 12.$$

Deelt men de vergelijking (a) door $x - \frac{1}{2}$, dan verkrijgt men de beide overige wortels der vergelijking; doch dezelve irrationaal zijnde, zullen wij er ons niet bij ophouden.

LII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van twee zeshoekige getallen is het verſchil gelijk aan het verſchil tuſſchen het tweede en het vierkant van het eerſte. Ook is de vierkantswortel uit het quotient van de ſom der getallen door het kleinſte gelijk aan den wortel van het laatstgenoemde getal. Vraage naar deze getallen?

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Men kan de beide getallen voorſtellen door $2m^2 - m$ en $2n^2 - n$, en dan is volgens de eerſte voorwaarde van het vraagſtuk

$$2m^2 - m - (2n^2 - n) = (2n^2 - n)^2 - (2m^2 - m),$$

en $$(2n^2 - n)^2 + (2n^2 - n) = 4m^2 - 2m,$$

waar-

waaruit volgt, door het behandelen dezer vergelijking als eene tweede magts vergelijking, waarvan $2n^2 - n$ de onbekende is,

$$2n^2 - n = -\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{(4m^2 - 2m + \tfrac{1}{4})}$$
$$= -\tfrac{1}{4} \pm (2m - \tfrac{1}{2}).$$

Wij hebben dus

$$2n^2 - n = +2m - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a),$$

of

$$2n^2 - n = -2m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Gebruikende nu eerst de waarde (a) voor $2n^2 - n$, dan hebben wij door in de tweede voorwaarde van het voorstel, welke geeft

$$\frac{2m^2 - m + 2n^2 - n}{2n^2 - n} = n^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c),$$

deze waarde te stellen

$$\frac{2m^2 - m + 2m - 1}{2m - 1} = n^2,$$

of

$$m + 1 = n^2,$$

en deze waarde in (a) gesteld, geeft

$$2n^2 - n = 2n^2 - 2 - 1,$$

of

$$n = 3,$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$m = 8,$$

de beide getallen zijn dus 15, en 120.

Gebruikt men de tweede waarde (b) van $n^2 - n$, dan vindt men uit de vergelijking (c)

$$\frac{2m^2 - m - 2m}{-2m} = n^2,$$

of

$$2m - 3 = -2n^2,$$

hetwelk verbonden met (c) geeft

$$2n^2 - n = -2n^2 - 3,$$

of

$$-n = 3,$$

even als de voorgaande uitkomst, en men vindt alzoo dezelfde getallen.

LIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

In eene rekenkunstige reeks van vier termen is het verschil tusschen het product der uiterste termen met dat der middelsten een derde van de som der reeks, terwijl het verschil tusschen het pro-

duct van den eerſten en derden term, en dat van den tweeden en vierden gelijk aan de ſom der reeks is. Men vraagt naar deze reeks?

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel voor de achtervolgende termen der reeks

$$x-3y,\ x-y,\ x+y \text{ en } x+3y,$$

dan hebben wij door de eerſte voorwaarde

$$(x-y)(x+y)-(x-3y)(x+3y)=\frac{4x}{3},$$

en door de tweede voorwaarde

$$(x-y)(x+3y)-(x+y)(x-3y)=4x;$$

de eerſte vergelijking herleid zijnde, geeft

$$-y^2+9y^2=\frac{4x}{3},$$

of

$$8y^2=4x,$$

De tweede geeft

$$4yx=4x,$$

of

$$y=1,$$

en dit in de voorlaatſte vergelijking gebragt, vindt men

$$x=6,$$

de reeks is dus 3, 5, 7, 9.

LIV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt naar de waarde van de uitdrukking

$$\{px-p^2)^{2n}(px+px^2-2p^3)^n-(p-x)^b(p^2+2px-3x^2)^n\}:\{p-x)^b(px-p^2)^{2n}\}$$

voor $x=p$, *zijnde* a, n *en* b *geheele poſitieve getallen, en* b *kleiner dan* n?

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

De opgegevene uitdrukking kan geſchreven worden

$$\frac{(px-p^2)^{2n}(p^2x+px^2-2p^3)^n}{(p-x)^b(px-p^2)^{2n}}-\frac{(p-x)^b(p^2+2px-3x^2)^n}{(p-x)^b(px-p^2)^{2n}},$$

of

$$\frac{p^n(px+x^2-2p^2)^n}{(p-x)^b}-\frac{(p^2+2px-3x^2)^n}{p^{2n}(x-p)^{2n}},$$

of ook p^n,

$$\frac{(x^2-p^2+px-p^2)^n}{(p-x)^b}-\frac{(p^2-x^2+2px-2x^2)^n}{p^{2n}(x-p)^{2n}},$$

en

en dus $p^n = \frac{(p-x)^n (x-2p)^n}{(p-x)^b} - \frac{(x-p)^n (-3x-p)^n}{p^{2n}(x-p)^{2n}}$,

waaruit volgt

$$p^n (x-2p)(p-x)^{n-b} = \frac{(-3x-p)^n}{p^{2n}(x-p)^n}.$$

De eerſte term dezer uitdrukking wordt voor $x=p$ gelijk nul, dewijl $n-b$ poſitief is; de tweede term wordt oneindig groot voor $x=p$, en dus is dit dan ook de waarde der geheele uitdrukking.

LV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Wanneer men eene onbepaalde regte lijn om eene gewone epicycloïde laat wentelen, zoodat de lijn altijd de kromme aanraakt, dan vraagt men naar de vergelijking der kromme lijn, welke eenig punt dezer lijn beſchrijft?

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Zij ODD'P' (*Fig.* 25) de gewone epicycloïde, waarvan OGH de makende cirkel is, wiens ſtraal EO $= a$ is. Laat verder DP eene willekeurige raaklijn in D zijn; wanneer men zich nu voorſtelt, dat de raaklijn langs den boog DD'O bewogen wordt, zoodat de achtervolgende punten van D naar C op de punten van den boog DD'O vallen, zoo zal, wanneer DC $=$ *boog* DD'O genomen wordt, het punt C in O vallen, als de bewegende raaklijn langs de lijn OX de epicycloïde in O rakende, gekomen zal zijn. Het beſchrijvende punt P op de raaklijn nu nog gegeven moetende zijn, om de gevraagde kromme te bepalen, zoo nemen wij het punt P' dezer kromme als gegeven aan, en ſtellen OP' $= b$. Verder nemen wij de lijn OX als as en het punt O als den oorſprong der hoeken aan; dan heeft men voor de polaire vergelijking der epicycloïde QDP', zijnde OD $= s'$ en hoek XOD $= \phi$

$$s' = 4a\,Sin^2 \tfrac{1}{2}\phi.$$

De hoek PDQ $= \psi$ van de raaklijn met den voerſtraal is in het algemeen

$$Tang.\,\psi = \frac{s'\,\partial\phi}{\partial s'},$$

en derhalve in ons geval

$$Tang.\,\psi = \frac{4a\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\theta\,\partial\theta}{4a\,Sin.\tfrac{1}{2}\theta\,Cos.\tfrac{1}{2}\theta\,\partial\theta} = Tang.\tfrac{1}{2}\theta,$$

of gelijk bekend is $\psi = \tfrac{1}{2}\theta$.

Even zoo heeft men voor de differentiaal van den boog $DD'D = s$ in het algemeen

$$\partial s = V(x'^2\partial\theta^2 + \partial x'^2),$$

en derhalve voor de epicycloïde

$$\partial s = \partial\theta V\{16a^2\,Sin^4.\tfrac{1}{2}\theta + 16a^2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\theta\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\theta\} = 4a\,Sin.\tfrac{1}{2}\theta\,\partial\theta,$$

en dus $s = C - 8a\,Cos.\tfrac{1}{2}\theta$

voor $\theta = o$ is $s = o$ en derhalve $C = 8a$, alsmede

$$s = 8a(1 - Cos.\tfrac{1}{2}\theta) = 16a\,Sin^2.\tfrac{1}{4}\theta.$$

Stellen wij van de gevraagde kromme den voerstraal $OP = z$ en hoek $POX = \phi$, dan zal $DP = DC + CP = boog\,DD'O + EO = s + b$ zijn, en uit den driehoek DOP volgen dan de evenredigheden

$$DO : OP = Sin.\,DPO : Sin.\,ODP,$$

en

$$DP : OP = Sin.\,DOP : Sin.\,ODP,$$

of

$$z' : z = Sin.(\psi + \theta - \phi) : Sin.\phi,$$

en

$$s + b : z = Sin.(\theta - \phi) : Sin.\psi,$$

waarvoor men ook schrijven kan

$$4a\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\theta : z = Sin.(\tfrac{3}{2}\theta - \phi) : Sin.\tfrac{1}{2}\theta,$$

en

$$16a\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\theta + b : z = Sin.(\theta - \phi) : Sin.\tfrac{1}{2}\theta$$

Uit deze beide vergelijkingen den hoek θ verdrijvende, zal men de gevraagde vergelijking tusschen z en ϕ van de kromme vinden; doch deze verdrijving kan niet dan door de oplossing van eene hoogere magtsvergelijking uitgevoerd worden. De beide laatste vergelijkingen zijn echter genoegzaam tot het bepalen der voornaamste eigenschappen der verlangde kromme.

LVI. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt de differentiaal-vergelijking $(\partial^2 y)^2 + a\,x\,\partial x^2\partial^2 y + b\,\partial x^4 = o$ *te integreren?*

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

De opgegevene vergelijking door ∂x^2 deelende, kan men dezelve schrijven onder den vorm

$$\partial^2 y$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x}\right)^2 + a x \frac{\partial^2 y}{\partial x} \partial x + b \partial x^2 = 0,$$

of daar $\frac{\partial^2 y}{\partial x} = \partial . \frac{\partial y}{\partial x}$ is,

$$(\partial . \frac{\partial y}{\partial x})^2 + a x \partial . \frac{\partial y}{\partial x} . \partial x + b \partial x^2 = 0.$$

Hieruit $\partial . \frac{\partial y}{\partial x}$ oplosfende, komt er

$$\partial . \frac{\partial y}{\partial x} = \{ -\tfrac{1}{2} a x \pm V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b) \} \partial x,$$

en dus $\frac{\partial y}{\partial x} = -\tfrac{1}{2} a \int x \partial x \pm \int V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b) \partial x$

$$= -\tfrac{1}{4} a x^2 \pm \int V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b) \partial x + C,$$

en verder

$$y = C' - \tfrac{1}{12} a x^3 + C x \pm \int V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b) \partial x^2.$$

Voor den laatsten term dezer vergelijking kan men schrijven

$$\int \partial x \int V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b) \partial x = \int \partial x \int \partial Y = \int Y \partial x$$

$$= Y x - \int x \partial Y,$$

en daar nu hier $\partial Y = V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b) \partial x,$

zoo is $Y = \frac{1}{a} \{ \tfrac{1}{2} a x V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b) - b Log.(-\tfrac{1}{2} a x + V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b)) \},$

en $$\int x \partial Y = \int x \partial x V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b)$$

$$= \frac{2}{3 a^2} (\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b)^{\frac{3}{2}}$$

Derhalve is

$$Y x - \int x \partial Y = \tfrac{1}{2} x^2 V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b)$$

$$- \frac{b x}{a} Log.(-\tfrac{1}{2} a x + V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b))$$

$$- \frac{2}{3 a^2} (\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{3} (x^2 + 2 \frac{b}{a^2}) V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b) - \frac{b x}{a} Log.(-\tfrac{1}{2} a x + V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b))$$

en eindelijk

$$y = C' + C x - \tfrac{1}{12} a x^3 + \tfrac{1}{3} (x^2 + 2 \frac{b}{a^2}) V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b)$$

$$- \frac{b x}{a} Log.(-\tfrac{1}{2} a x + V(\tfrac{1}{4} a^2 x^2 - b)).$$

LVII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt de formule $Sec.\phi\partial^2\psi + Tang^2.\phi\partial\phi\partial\psi = \partial\phi\partial\psi$ *Log.* $Cos\ \phi$ *te integreren?*

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Deelende de opgegevene vergelijking door $Sec.\phi$, dan komt er

$$\partial^2\psi + Cos.\phi Tang^2.\phi\partial\phi\partial\psi = Cos\ \phi\partial\phi\partial\psi\ Log.\ Cos.\phi,$$

of $\partial^2\psi = \partial\phi\partial\psi\,(Cos.\phi\ Log.\ Cos.\phi - Sin.\phi\ Tang.\phi)$.

Stellende hierin $\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = z$ en dus $\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi} = \partial z$, dan komt er uit de voorgaande vergelijking

$$\partial\phi\partial z = z\partial\phi^2\,(Cos.\phi\ Log.\ Cos.\phi - Sin.\phi\ Tang.\phi),$$

of $\frac{\partial z}{z} = \partial\phi\,(Cos.\phi\ Log.\ Cos.\phi - Sin.\phi\ Tang.\phi)$,

waarvan de integraal is

$$Log.\,C\,z = \int\partial\phi\ Cos.\phi\ Log.\ Cos.\phi - \int\partial\phi\ Sin.\phi\ Tang.\phi$$

Door de gewone herleidingsformule wordt

$$\int\partial\phi\ Cos.\phi\ Log.\ Cos.\phi = Sin.\phi\ Log.\ Cos.\phi + \int Sin.\phi\ \frac{Sin.\phi}{Cos.\phi}\partial\phi,$$

hetwelk in de voorgaande vergelijking overgebragt geeft

$$Log.\,C\,z = Sin\ \phi\ Log.\ Cos.\phi,$$

en dus $Log.\,C\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = Sin.\phi\ Log.\ Cos.\phi$,

of $C\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = (Cos.\phi)^{Sin.\phi}$

en $C\,\psi = C' + \int Cos.\phi^{Sin.\phi}\partial\phi.$

Tot het vinden dezer laatſte integraal nemen wij de bekende reeks van BERNOUILLI.

$$\int X\partial x = Xx - \frac{x^2}{1.2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + enz.$$

waarin dan hier $x = \phi$ en $X = Cos.\phi^{Sin.\phi}$ is, en waaruit volgt

$$Log.\,X = Sin.\phi\ Log.Cos\ \phi,$$

alsmede $\partial X = X\,(Cos.\phi Log.\ Cos.\phi - \frac{Sin^2.\phi}{Cos.\phi})\partial\phi$

$$= Cos.\phi^{Sin\ \phi}\,(Cos.\phi\ Log.\ Cos.\phi - \frac{Sin^2.\phi}{Cos.\phi})\partial\phi.$$

als

alsmede $\partial^2 X = (Cos.\phi\, Log.\, Cos.\,\phi - \frac{Sin^2.\phi}{Cos.\phi})\,\partial\phi\,\partial X$

$+X(-Sin.\phi\, Log.\, Cos.\,\phi - Sin.\phi - \frac{2\,Cos^2.\phi\, Sin.\,\phi + Sin^3.\phi)}{Cos^2.\phi}\,\partial\phi^2$

$= (Cos.\,\phi\, Lag.\, Cos.\phi - \frac{Sin^2.\phi}{Cos.\phi})\,\partial\phi\partial X$

$- X\,(Sin.\,\phi\, Log.\, Cos.\,\phi - 3\,Sin.\,\phi + \frac{Sin^3.\phi}{Cos^2.\phi})\,\partial\phi^2$

$= X\{(Cos.\,\phi\, Log.\, Cos.\,\phi - \frac{Sin^2.\phi}{Cos\,\phi})^2$

$- Sin.\,\phi\, Log.\, Cos.\,\phi - 3\,Sin.\,\phi + \frac{Sin^2.\phi}{Cos^2.\phi}\}\,\partial\phi^2,$

en zoo voor de volgende termen op dezelfde wijze voortgaande; men heeft dus

$$C\psi = C' + X\{\phi - \tfrac{1}{2}(Cos.\,\phi\, Log.\, Cos.\,\phi - \frac{Sin^2.\phi}{Cos.\phi})\phi^2 + \frac{\phi^3}{6} \ldots$$

$$((Cos.\,\phi\, Log.\, Cos.\,\phi - \frac{Sin^2.\phi}{Cos.\phi})^2 - Sin\,\phi\, Log.\, Cos.\phi - 3\,Sin.\phi \ldots$$

$$+ \frac{Sin^2.\phi}{Cos^2.\phi}) - enz.\}.$$

LVIII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt de waarde te vinden van ϕ uit de vergelijking $Tang.\,(\alpha+\phi) + Sin.\,(\alpha+2\phi) = Tang.\,\phi$?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN. *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Omdat in het algemeen

$$Tang.\,\alpha - Tang.\,\beta = \frac{Sin\,(\alpha-\beta)}{Cos.\,\alpha\, Cos.\,\beta}$$

is, zoo kan men de gegevene vergelijking herleiden tot

$$\frac{Sin\,q}{Cos.\,(\alpha+2\phi)\;Cos.\,\phi} + Sin.\,(\alpha+2\phi) = 0.$$

En daar ook altijd

$$Cos\,p\,Cos.\,q = \tfrac{1}{2}\,Cos.\,(p-q) + \tfrac{1}{2}\,Cos.\,(p+q),$$

zoo verandert de voorgestelde vergelijking verder in

$$Sin.\,\alpha + \tfrac{1}{2}\,Sin.\,(\alpha+2\phi)\,(Cos.\,\alpha + Cos.\,(\alpha+2\phi)) = 0,$$

of

of wel $4\,Sin^2.a = Sin^2.(\alpha+2\phi)\,(Cos.\alpha + Cos.(\alpha+2\phi))^2$
$= (1-Cos^2.(\alpha+2\phi))\,(Cos.\alpha+Cos.(\alpha+2\phi))^2$,
waaruit na herleiding volgt
$Cos^4.(\alpha+2\phi)+2\,Cos.\alpha\,Cos^3.(\alpha+2\phi)+Sin^2.\alpha\,Cos^2.(\alpha+2\phi)$
$-2\,Cos.\alpha\,Cos.(\alpha+2\phi)+4\,Sin^2.\alpha-Cos^2.\alpha=0.$
Deze vergelijking zal nu door benadering de waarde van $\alpha+2\phi$ en dus ook van ϕ geven.

LIX. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt de formule $x\partial y = y\,Log.y\,Log^2.x(1+Log^2.y\,Log.x)\,\partial x$ *te integreren?*

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Men kan de opgegevene vergelijking ſchrijven
$x\partial y - y\,Log.y\,Log^2.x\,\partial x = y\,Log^3.y\,Log^3.x\,\partial x$,
of door xy deelende
$$\frac{\partial y}{y} - Log.y\,Log^2.x\,\frac{\partial x}{x} = Log^3.y\,Log^3.x\,\frac{\partial x}{x}.$$
Stellende nu $Log.x = p$ en $Log.y = q$, dan is
$$\partial p = \frac{\partial x}{x} \quad \text{en} \quad \partial q = \frac{\partial y}{y},$$
en onze vergelijking verandert in
$$\partial q - qp^2\partial p = p^3q^3\partial p,$$
of in
$$\frac{\partial q}{q^3} - \frac{p}{q^2}\partial p = p^3\partial p.$$
Hierin wederom ſtellende
$$q^{-1} = r,$$
dan is
$$\partial z = -\frac{2\,\partial q}{q^3},$$
en de vergelijking gaat over in
$$\partial r + 2rp^2\partial p + 2p^3\partial p = 0.$$
Deze vergelijking afſcheidende, komt er (I. R. SCHMIDT, *Dif. en Int. Rek.* §. 285)
$$r = e^{-\int 2p^2\partial p}\int e^{\int 2p^2\partial p} \times -2p^3\partial p,$$
$$= -2e^{-\int 2p^2\partial p}\int p^3\partial p\, e^{\int 2p^2\partial p}.$$
Nu is
$$\int p^3\partial p = \tfrac{1}{4}p^4,$$

zoodat wij hebben

$$r = -2e^{-\frac{2}{3}p^3} \int p^3 \partial p e^{\frac{2}{3}p^3},$$

en omdat

$$e^{\frac{2}{3}p^3} \partial p = \frac{1}{2p^2} \partial e^{\frac{2}{3}p^3}$$

is, zoo hebben wij

$$r = -2e^{-\frac{2}{3}p^3} \int \tfrac{1}{2} p \partial . e^{\frac{2}{3}p^3}.$$

Stellen wij nu in de algemeene herleidingsformule

$$\int X \partial Y = XY - \int Y \partial X$$

$X = p$ en $\partial Y = \partial . e^{\frac{2}{3}p^3}$,

dan komt er

$$\int p \partial . e^{\frac{2}{3}p^3} = p e^{\frac{2}{3}p^3} - \int \partial p e^{\frac{2}{3}p^3}.$$

Verder is

$$e^{\frac{2}{3}p^3} = 1 + \tfrac{2}{3}p^3 + \frac{1}{1.2}(\tfrac{2}{3}p^3)^2 + \frac{1}{1.2.3}(\tfrac{2}{3}p^3)^3 + enz.$$

en derhalve

$$\int \partial p . e^{\frac{2}{3}p^3} = p + \tfrac{1}{5}p^6 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{4}{9} p^7 + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{8}{27} \cdot \tfrac{1}{10} p^{10} + enz.$$
$$= p + \tfrac{1}{5}p^6 + \tfrac{2}{63}p^7 + \tfrac{4}{385}p^{10} + enz.$$

alsmede

$$\int p \partial . e^{\frac{2}{3}p^3} = p e^{\frac{2}{3}p^3} - p - \tfrac{1}{5}p^6 - \tfrac{2}{63}p^7 - \tfrac{4}{385}p^{10} - enz.$$

en $r = -p + e^{\frac{2}{3}p^3}(p + \tfrac{1}{5}p^6 + \tfrac{2}{63}p^7 + \tfrac{4}{385}p^{10} + enz.)$

of $r = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{Log^2 . y} = -Log . x + \ldots\ldots$

$+ e^{-\frac{2}{3}Log^3 . x}(Log . x + \tfrac{1}{5}Log^4 . x + \tfrac{2}{63}Log^7 . x + \tfrac{4}{385}Log^{10} . x + enz.) + C.$

LX. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt de formule $\partial y = x(2+x)\partial x \sqrt{(3+5x)^3}$ *te integreren?*

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Stellen wij in de opgegevene vergelijking $3 + 5x = z^2$, dan is

$$5 \partial x = 2 z \partial z,$$

en $2 + x = 2 + \frac{z^2 - 3}{5}$

=

$$= \frac{7 + z^2}{5}.$$

De opgegevene vergelijking gaat hierdoor over in

$$\partial y = \frac{z^2 - 3}{5} \times \frac{7 + z^2}{5} \times \frac{2 z \partial z}{5} \times z^3$$

$$= \frac{2}{125} \{ z^8 + 4 z^6 - 21 z^4 \} \partial z,$$

en derhalve

$$y = \frac{2}{125} \{ \tfrac{1}{9} z^9 + \tfrac{4}{7} z^7 - \tfrac{21}{5} z^5 + C \},$$

en hierin voor z zijne waarde ſtellende, komt er

$$y = \frac{2}{125} \{ (\tfrac{1}{9}(3 + 5x)^3 + \tfrac{4}{7}(3 + 5x) - \tfrac{21}{5})(3 + 5x)^3 + C \}$$

$$= \frac{2}{125} \{ (\tfrac{25}{9} x^2 + \tfrac{139}{21} x + \tfrac{18}{35})(3 + 5x)^3 + C \}.$$

LXI. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK, ROELDZ.

Van drie ſchepen liggen A *en* B *op* 38° *N. breedte*, A *op* 345° 70′ *lengte en* B *op* 355° 50′, *het derde* C *ligt op* 48° *N. breedte en* 352° *lengte; men vraagt den koers en de verheid, opdat de drie ſchepen in een punt* D *te zamen komen op gelijke afſtanden der drie oorſpronkelijke ligplaatſen?* (*)

OPLOSSING *van* J. VAN WIJK, ROELDZ.

Laten (*Fig.* 26) de drie punten A, B en C de ligplaatſen der drie ſchepen voorſtellen en D het punt van zamenkomst, dat moet, volgens het voorſtel, D het middelpunt van den omgeſchreven cirkel zijn. De loodlijnen CF en DE nederlaten alsmede de loodlijn DG, en de ſtralen AD, BD en DC trekkende, dan is AB gelijk aan het verſchil v in lengte der beide plaatſen, CF het verſchil v' in breedte der plaats A of B met C, en BF het verſchil v'' in lengte der plaatſen C en B. Om dat verder de loodlijn DE, AB midden door deelt, zoo is AE $= \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2} v$. Maar nu is $v = 355° 50' - 345° 20' = 10° 30'$ en dus $\frac{1}{2} v = 5° 15'$, de lengte van het punt van zamenkomst D is dus 350° 35′.

De hoek ACF wordt gevonden uit de vergelijking

$$Tang. ACF = \frac{AF}{CF} = \frac{v - v''}{v'} = \frac{10° 30' - (3° 50')}{10°} = \frac{6° 40'}{10°}$$

$$=$$

(*) A. VAN DAM, *Nieuwe Hoornſche Schuitjapper*, N°. 37 der beſluitquestien.

$$= \frac{6,6667}{10} = 0,6667,$$

en derhalve *hoek* ACF = 25° 55′.

Op dezelfde wijze vindt men voor hoek FCB

$$Tang.\,FCB = \frac{3°\,50'}{10°} = 0,383333,$$

en FCB = 15° 37′,

en dus ook hoek ACB = 41° 32′.

Nu is verder DG = AF — AE = 6° 40′ — 5° 15′

= 1° 25′.

Maar omdat D het middelpunt van den cirkel door ABC gaande is, zoo is *hoek* ACB = ½ *hoek* ADB = *hoek* ADE, derhalve

hoek ADE = 41° 32′,

en *hoek* DAE = 48° 28′.

Ook is DE = AE × *Tang.* DAE, waarin nu de waarden voor AE en DAE gesteld, geeft

DE = 5°,9834 of = 6°,

of 6 × 20 = 120 mijlen.

Omdat CF = 19°, DG = 1° 25′ en DE = 6° is, zoo heeft men

$$Tang.\,DCG = \frac{1°\,25'}{4} = 0,3541667,$$

of DĈG = 19° 30′.

Uit dit alles volgt dan, dat elk der schepen zal moeten zeilen 120 mijlen, A 48° 28′ benoorden het oosten, B 48° 28′ benoorden het westen, C 19° 30′ bewesten het zuiden, terwijl de lengte van D is 350° 13′ en de breedte 54°.

LXII. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Uit een punt binnen eenen driehoek zijn lijnen naar de uiteinden der grondlijn getrokken, makende met dezelve hoeken gelijk aan den tophoek van den driehoek; door dit punt en den tophoek is nog eene lijn getrokken; zoo nu de stukken, waarin het punt deze lijn verdeelt, alsmede de tophoek gegeven zijn, vraagt men den driehoek te bepalen?

Oplossing *van* J. Bassan.

Laat ABC (*Fig.* 27) de voorgestelde driehoek zijn, waarin hoek MAD = MCD = ABC = *a*, DM = *b* en MB = *a* is; stel-

len-

lende dan hoek $MDC = 90 + \psi$, dan is hoek $MDA = 90 - \psi$, en ſtellende hoek $DBC = \frac{1}{2}\alpha + \phi$, zoo is hoek $DBA = \frac{1}{2}\alpha - \phi$, alsmede hoek $MCB = 180° - \frac{3}{2}\alpha - \phi - 90 - \psi - \alpha = 90° - (\frac{3}{2}\alpha + \phi + \psi)$ en hoek $BAM = 180° - \frac{1}{2}\alpha + \phi - 90 + \psi - \alpha = 90° - (\frac{3}{2}\alpha - \psi - \phi)$.

Uit den driehoek BMC heeft men

$MB : MC = Cos.(\frac{3}{2}\alpha + \phi + \psi) : Sin.(\frac{1}{2}\alpha + \phi) = a : MC$. (1),

en uit BMA

$MB : MA = Cos.(\frac{3}{2}\alpha - \phi - \psi) : Sin.(\frac{1}{2}\alpha - \phi) = a : MC$. (2),

omdat $MC = MA$ is. Uit den driehoek MDA heeft men dan nog

$$MA : MD = Cos.\psi : Sin.\alpha = MC : b,$$

of $$MC = b\frac{Cos.\psi}{Sin.\alpha}.$$

Deze waarde in de vergelijkingen (1) en (2) ſtellende, komt er

$$b\frac{Cos.\psi}{Sin.\alpha}Cos.(\tfrac{3}{2}\alpha + \phi + \psi) = a\,Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha + \phi),$$

en $$b\frac{Cos.\psi}{Sin.\alpha}Cos.(\tfrac{3}{2}\alpha - \phi - \psi) = a\,Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi).$$

Uit beide den boog ϕ ontwikkelende en door $Cos.\phi$ deelende, komt er

$$b\frac{Cos.\psi}{Sin.\alpha}\{Cos.(\tfrac{3}{2}\alpha + \psi) - Sin.(\tfrac{3}{2}\alpha + \psi)Tang.\phi\} = a\,Sin.\tfrac{1}{2}\alpha + a\,Cos.\tfrac{1}{2}\alpha\,Tang.\phi,$$

en

$$b\frac{Cos.\psi}{Sin.\alpha}\{Cos.(\tfrac{3}{2}\alpha - \psi) + Sin.(\tfrac{3}{2}\alpha - \psi)Tang.\phi\} = a\,Sin.\tfrac{1}{2}\alpha - a\,Cos.\tfrac{1}{2}\alpha\,Tang.\phi,$$

waaruit volgt

$$Tang.\phi = \frac{a\,Sin.\frac{1}{2}\alpha\,Sin.\alpha - b\,Cos.\psi\,Cos.(\frac{3}{2}\alpha + \psi)}{b\,Cos.\psi\,Sin.(\frac{3}{2}\alpha + \psi) + a\,Cos.\frac{1}{2}\alpha\,Sin.\alpha},$$

en $$Tang.\phi = \frac{a\,Sin.\frac{1}{2}\alpha\,Sin.\alpha - b\,Cos.\psi\,Cos.(\frac{3}{2}\alpha - \psi)}{b\,Cos.\psi\,Sin.(\frac{3}{2}\alpha - \psi) + a\,Cos.\frac{1}{2}\alpha\,Sin.\alpha}.$$

Deze beide vergelijkingen aftrekkende en de noemer verdrijvende, komt er

$$(a\,Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\,Sin.\alpha - b\,Cos.\psi\,Cos.(\tfrac{3}{2}\alpha + \psi))(b\,Cos.\psi\,Sin.(\tfrac{3}{2}\alpha - \psi) + a\,Cos.\tfrac{1}{2}\alpha\,Sin.\alpha)$$
$$= -(a\,Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\,Sin.\alpha - b\,Cos.\psi\,Cos.(\tfrac{3}{2}\alpha - \psi))(b\,Cos.\psi\,Sin.(\tfrac{3}{2}\alpha + \psi)$$
$$+ a\,Cos.\tfrac{1}{2}\alpha\,Sin.\alpha).$$

Deze uitdrukking ontwikkelende, vindt men

$$\left.\begin{array}{l} 2\,a\,b\,Sin.\tfrac{1}{2}\,a\,Sin.\,a\,Cos.\,\psi\,\{Sin.(\tfrac{1}{2}\,a-\psi)+Sin.(\tfrac{1}{2}\,a+\psi)\} \\ +2\,a^2\,Sin.\tfrac{1}{2}\,a\,Cos.\tfrac{1}{2}\,a\,Sin^2.\,a \\ -2\,b\,Cos.\tfrac{1}{2}\,a\,Sin.\,a\,Cos.\,\psi\,\{Cos.(\tfrac{1}{2}\,a-\psi)+Cos.(\tfrac{1}{2}\,a+\psi)\} \\ -b^2\,Cos^2.\,\psi\,\{Cos.(\tfrac{1}{2}\,a+\psi)\,Sin.(\tfrac{1}{2}\,a-\psi)+Sin.(\tfrac{1}{2}\,a+\psi) \\ Cos.(\tfrac{1}{2}\,a-\psi)\} \end{array}\right\} = 0$$

hetwelk gemakkelijk herleid wordt tot

$$\left.\begin{array}{l} 2\,a\,b\,Sin.\tfrac{1}{2}\,a\,Sin.\,a\,Sin.\tfrac{1}{2}\,a\,Cos^2.\,\psi \\ +a^2\,Sin^3.\,a \\ -2\,a\,b\,Cos.\tfrac{1}{2}\,a\,Sin.\,a\,Cos.\tfrac{1}{2}\,a\,Cos^2.\,\psi \\ -b^2\,Sin.3\,a\,Cos^2.\,\psi \end{array}\right\} = 0$$

of wel

$$-2\,a\,b\,Sin.\,a\,Cos.\,2\,a\,Cos^2.\,\psi+a^2\,Sin^3.\,a-b^2\,Sin.3\,a\,Cos^2.\,\psi=0,$$

waaruit volgt

$$Cos^2.\,\psi=\frac{a^2\,Sin^3.\,a}{b^2\,Sin.3\,a+2\,a\,b\,Sin.\,a\,Cos.\,2\,a}.$$

Uit deze vergelijking ψ gevonden zijnde, zoo is ook φ bekend, en derhalve kan men nu volgens de bekende regels de overige ſtukken van den driehoek berekenen.

LXIII. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Uit een punt binnen een' driehoek zijn lijnen naar de uiteinden van de grondlijn getrokken, zij maken met de opſtaande zijden hoeken gelijk aan den tophoek; zoo nu deze hoek, benevens de ſtukken waarin twee lijn, door den tophoek in het gegeven punt naar de grondlijn getrokken, door het gegeven punt verdeeld wordt, gegeven is, zoo vraagt men dezen driehoek te bepalen?

Oplossing van J. Bassan.

Zij ABC (*Fig.* 28) de voorgeſtelde driehoek, waarin BM $=a$, DM $=b$ en *hoek* MCB $=$ *hoek* MAB $=$ ABC $=\alpha$ is, dan ſtellen wij *hoek* DBC $=\frac{1}{2}\alpha+\varphi$ en ABD $=\frac{1}{2}\alpha-\varphi$; de driehoeken ABM en BMC geven nu

AM : BM $=$ *Sin.* $(\frac{1}{2}\alpha-\varphi)$: *Sin.* α,

of AM : a $=$ *Sin.* $(\frac{1}{2}\alpha-\varphi)$: *Sin.* α,

alsmede MC : a $=$ *Sin.* $(\frac{1}{2}\alpha+\varphi)$: *Sin.* α.

Maar nu is *drieh.* AMC $=$ *drieh.* AMD $+$ *drieh.* BMC,

of AM $\times$ MC *Sin.* AMC $=$ AM . b *Sin.* AMD $+$ MC . b *Sin.* DMC,

en daar *hoek* AMD $= \frac{1}{2}a - \phi$, *hoek* DMC $= \frac{3}{2}a + \phi$ en de *hoek* AMC $= 3a$ is, zoo hebben wij

AM × MC *Sin.* $3a =$ AM . *b Sin.* $(\frac{1}{2}a - \phi) +$ MC . *b Sin.* $(\frac{3}{2}a + \phi)$;

hierin nu voor AM en MC hunne waarde uit de voorgaande vergelijking ſtellende, komt er

$$a^2 \frac{Sin.(\frac{1}{2}a-\phi)\,Sin.(\frac{1}{2}a+\phi)}{Sin^2.a} = ab\frac{Sin.(\frac{1}{2}a-\phi)\,Sin.(\frac{3}{2}a-\phi)}{Sin.a\,Sin.3a} + ab\frac{Sin.(\frac{1}{2}a+\phi)\,Sin.(\frac{3}{2}a+\phi)}{Sin.a\,Sin.3a}$$

of

$$\frac{a}{Sin.a}(Cos^2.\phi - Cos^2.\tfrac{1}{2}a) = b\frac{2Sin.\frac{3}{2}a\,Sin.\frac{1}{2}a\,Cos^2.\phi + 2Cos.\frac{3}{2}a\,Cos.\frac{1}{2}a\,Sin^2.\phi}{Sin.3a}$$

alsmede $a\,Sin.3a\,(Cos^2.\phi - Cos^2.\frac{1}{2}a) = 2b\,Sin.a \ldots$

$$\{Sin.\tfrac{3}{2}a\,Sin.\tfrac{1}{2}a\,Cos^2.\phi + Cos.\tfrac{3}{2}a\,Cos.\tfrac{1}{2}a\,(1 - Cos^2.\phi)\},$$

of $a\,Sin.3a(Cos^2.\phi - Cos^2.\frac{1}{2}a) = 2b\,Sin.a\{Cos.\frac{3}{2}a\,Cos.\frac{1}{2}a - Cos.2a\,Cos^2.\phi\}$

waaruit volgt

$$Cos^2.\phi = \frac{2b\,Sin.a\,Cos.\frac{3}{2}a\,Cos.\frac{1}{2}a + a\,Cos^2.\frac{1}{2}a\,Sin.3a}{a\,Sin.3a + 2b\,Cos.2a\,Sin.a}.$$

De overige ſtukken kunnen nu door den gewonen regel gevonden worden.

LXIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

De naam van een groot kunstenaar beſtaat uit vijf letters, welke aldus worden bepaald, zoo men de letters van het Nederlandsch alphabet van 1 *tot* 22 *nommert. De eerſte en derde cijfer zijn pronik getallen; de wortel van het eerſte overtreft zoo veel den wortel van het derde, als de tweede of wel de vijfde cijfer bedraagt. De vierde cijfer is gelijk aan de ſom van het product des proniks wortels en derzelver verſchil. De vierde min de tweede cijfer is zoo veel als de derde; en neemt men eindelijk de eerſte cijfer, driemaal de derde en vijfmaal de vijfde, dan is van deze drie producten de ſom van het eerſte en derde een kwadraat, welks wortel de eenheid kleiner is dan die uit het middelſte product. Men vraagt naar den naam?*

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel voor de eerſte cijfer

$(x+y)^2$

$$(x+y)^2+x+y,$$

voor de tweede of vijfde y, dan is volgens de eerste voorwaarde de derde cijfer

$$x^2+x.$$

De vierde cijfer zal dan worden voorgesteld door

$$x(x+1)+y,$$

alzoo de vierde min de tweede $=(x+y)x$, hetwelk gelijk aan de derde cijfer zijnde, geeft

$$x(x+y)=x^2+x,$$

of $xy=x$ en $y=1$.

De eerste cijfer is dus

$$(x+1)^2+x+1=x^2+3x+2,$$

en derhalve volgens de laatste voorwaarde

$$1+\sqrt{(x^2+3x+2+5)}=\sqrt{3(x^2+x)}.$$

Deze vergelijking in de tweede magt verheffende, komt er

$$8+x^2+3x+2\sqrt{(x^2+3x+7)}=3(x^2+x),$$

of $\sqrt{(x^2+3x+7)}=x^2-4$,

en wederom in het vierkant verheffende,

$$x^2+3x+7=(x^2-4)^2,$$

of $x^4-9x^2-3x+9=0$,

waarvoor men schrijven kan

$$x^2(x^2-9)-3(x-3)=0,$$

of $x^2(x-3)(x+3)-3(x-3)=0$,

de vergelijking wordt dus voor $x=3$ voldaan; en dit is de eenige wortel in geheele getallen, welke aan dezelve voldoet. Wij hebben dus voor de eerste cijfer 19 of de letter T, voor de tweede en vijfde 1 of A, en voor de vierde 13 of L: alzoo is de gevraagde naam TALMA.

LXV. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Van eene rekenkunstige reeks van vier leden is de som der beide eersten en die der beide laatsten, als ook de som der gehele reeks kwadraat getallen; men vraagt naar deze reeks?

Opgelost door J. Bassan en C. van Schaick.

Oplossing van J. Bassan.

Nemen wij voor de achtervolgende termen der reeks

$$x,\ x+y,\ x+2y \text{ en } x+3y,$$

dan moet volgens het voorſtel:

$$x+x+y=m^2, \quad 2x+5y=n^2$$

en $$4x+6y=p^2=m^2+n^2$$

zijn. Uit de beide eerſte heeft men

$$2x=m^2-y=n^2-5y,$$

of $$4y=n^2-m^2.$$

Zal dus y een geheel getal wezen, dan moet n^2-m^2 door vier deelbaar zijn. Uit de derde vergelijking voor y zijne gevondene waarde ſtellende, komt er

$$4x+\tfrac{5}{2}(n^2-m^2)=m^2+n^2,$$

of $$8x=5m^2-n^2.$$

Zoodra men dus ſlechts voor m en n twee getallen kiest, waarvan de ſom der vierkanten weder een vierkant is, bij voorbeeld, gelijke veelvouden der drie getallen 3, 4 en 5, dan zal vooreerst aan de voorwaarde $m^2+n^2=p^2$ voldaan zijn; en omdat $4y=n^2-m^2$ is, zoo zal y een geheel getal wezen zoodra $n^2-m^2=(n-m)(m+n)$ door vier deelbaar is, dat is, zoodra de ſom of het verſchil der getallen een veelvoud van vier is; en zoo nu y een geheel getal is, dan wordt $2x$ dit altijd ook, omdat $2x+y=m^2$ gelijk aan een geheel getal is; m^2-y zal dan nog een even getal moeten wezen, maar $m^2-y=n^2-5y$ zijnde, zoo moet n^2-5y even zijn, en neemt men n een veelvoud van vier, gelijk hier boven is opgegeven, dan moet dus y altijd even wezen: men zal dus voor $n-m$ of $n+m$ altijd een veelvoud van 8 moeten nemen. Nemende dus eens $m=34=18$ en $n=4.4=16$, dan is $x=63, y=18$, en de reeks 63, 81, 99 en 117.

LXVI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Van een parallelogram zijn de zijden a en b en het verſchil p der diagonalen gegeven; men vraagt naar deze laatſte?

Opgelost door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laat een der diagonalen zijn x, dan is de andere $x+p$, en daar de ſom der vierkanten van de diagonalen gelijk is aan de dubbele ſom der vierkanten van de zijden, zoo is

$$x^2+(x+p)^2=2(a^2+b^2),$$

of

of $2x^2+2px=2a^2+2b^2-p^2$,
waaruit volgt $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(a^2+b^2-\frac{1}{2}p^2)}$.
De eene diagonaal is dus
$$x+p=\frac{1}{2}p+\sqrt{(a^2+b^2-\frac{1}{2}p^2)},$$
als de andere is
$$x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{(a^2+b^2-\frac{1}{2}p^2)}.$$
Gesteld, namelijk dat men geene negatieve lijnen hebben wil.

LXVII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Het verschil der vierkanten van twee getallen vermenigvuldigd met hun verschil is 75, *en de som der vierkanten vermenigvuldigd met hunne som geeft* 100. *Men vraagt naar deze getallen?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK *en* J. BAASAN.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laten de beide getallen zijn $x+y$ en $x-y$, dan is het verschil der vierkanten $4xy$, het verschil der getallen $2y$, de som der vierkanten $2x^2+2y^2$, en de som der getallen $2x$; waardoor wij, volgens het vraagstuk, de twee volgende vergelijkingen verkrijgen
$$8xy^2=75,$$
en
$$4(x^2+y^2)x=100.$$
De eerste vergelijking in de tweede stellende, komt er
$$4x^3+7\frac{1}{2}=100,$$
of
$$8x^3=200-75=125,$$
dus
$$2x=5;$$
hetwelk in de eerste vergelijking overgebragt geeft
$$5\cdot 4y^2=75,$$
of
$$4y^2=15,$$
en
$$y=\frac{1}{2}\sqrt{15}.$$
zoodat de gevraagde getallen zijn
$$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{15} \text{ en } \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{15}.$$

LXVIII. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

In het middelpunt van eene gegevene ellipsoïde is dat van eenen bol geplaatst, welks oppervlak dat der ellipsoïde doorsnijdt. Men

vraagt naar den inhoud der vier ſtukken, welke tuſſchen den bol en de ellipſoïde beſloten zijn?

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Zij in *Fig.* 29 AC*ac* eene ellips en A′C′*a′c′* een cirkel, welke het zelfde middelpunt B hebben; indien dan beide deze kromme lijnen om eene der aſſen A*a* van de ellips wentelen, dan worden door deze beweging de ellipſoïde en de bol, in het voorſtel bedoeld, voortgebragt; om aan het voorſtel te beantwoorden, moet de cirkel de ellips ſnijden, en dus de ſtraal van den eerſten grooter dan de halve kleine as, en kleiner dan de halve groote as der ellips wezen; dat is, zoo *r* de ſtraal en *a* en *b* de halve aſſen aanwijzen $r < b$ en $r > a$. Het is verder blijkbaar, dat de ellipſoïde en bol zich volgens cirkels ſnijden, waarvan de vlakken door de lijnen DD′ en *dd′* worden aangewezen.

Ingevolge het voorſtel zal dan gezocht moeten worden 1°. de inhoud van het ligchaam I ontſtaan door de omwenteling van de figuur DC′*d*C om de as A*a*, 2°. De inhoud K van het ligchaam voortgebragt door de omwenteling van A′DC*da′* om A*a*, en 3°. de inhoud L van het ligchaam voortgebragt door de omwenteling van het ſegment ADA′D′ om de as A*a*.

De aſſen A*a* en C*c* als coördinaten aſſen nemende, en ſtellende BC $= b$ en *a*B $= a$, dan is de vergelijking der ellips

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

en die van den bol

$$y'^2 = r^2 - x'^2.$$

De coördinaten *v* en *t* van de ſnijpunten *d*, D, enz. worden dan gevonden door de vergelijkingen

$$v^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - t^2),$$

en

$$v^2 = r^2 - t^2,$$

of

$$v^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - r^2 + v^2),$$

dat is

$$v^2 = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}b^2,$$

en

$$t^2 = r^2 - \frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}b^2$$

=

$$= \frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2} a^2.$$

De inhoud van de bolvormige schijf DD′e′C′ wordt gevonden door in de algemeene formule

$$\pi \int y'^2 \partial x'$$

voor y' of x' hunne waarde te stellen; wij hebben dus voor den inhoud van dit segment

$$\pi \int (r^2 - x'^2) \partial x' = \pi (r^2 x' - \tfrac{1}{3} x'^3),$$

waarbij geene standvastige behoeft, omdat voor $x' = 0$ de inhoud reeds gelijk nul wordt; voor $x' = EB = t$ heeft men dan

$$\textit{inh. schijf } DD'c'C' = \pi t (r^2 - \tfrac{1}{3} t^2).$$

Deze inhoud afgetrokken van die des halven bols A′C′c′ geeft voor den inhoud van het segment A′DD′A′

$$\tfrac{2}{3}\pi r^3 - \pi t (r^2 - \tfrac{1}{3} t^2) = \pi (\tfrac{2}{3} r^3 - r^2 t + \tfrac{1}{3} t^3)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi (2r^3 - 3r^2 t + t^3) \quad . \quad (1).$$

In de ellipsoïde ACac is de inhoud van de schijf CDD′c =

$$\pi \int y^2 \partial x = \frac{b^2}{a^2} \int (a^2 - x^2) \partial x$$

$$= \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - \tfrac{1}{3} x^2) x,$$

waarbij wederom geene standvastige behoeft. De inhoud der halve ellipsoïde is dus $\frac{2}{3}\pi b^2 a$, en die van de schijf CDD′c, alwaar $EB = t$ is

$$\pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - \tfrac{1}{3} t^2) t,$$

en dus de inhoud van het segment DA′D

$$\tfrac{2}{3}\pi b^2 a - \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - \tfrac{1}{3} t^2) t = \tfrac{1}{3}\pi \frac{b^2}{a^2} (2a^3 - 3a^2 t + t^3) \quad . \quad (2).$$

Stellen wij nu in de waarden voor t en x, $a^2 - b^2 = e^2$ en $r^2 - b^2 = f^2$, deze beide waarden zijn dan altijd van hetzelfde teeken, omdat r tusschen a en b moet invallen, zal de bol de ellipsoïde snijden. Wij hebben dus

$$y^2 = \frac{e^2 - f^2}{e^2} b^2,$$

en

$$b^2 = \frac{f^2}{e^2} a^2.$$

Deze waarde van z geſteld in de vergelijkingen (1) en (2) geven dus

inhoud bolv. ſeg. $A'DD_1 = \frac{1}{3}\pi(3r^2 - 3\frac{f}{e}r^2 a + \frac{f^2}{e^2}a^2)$ . . (4),

inhoud ellip. ſeg. $ADD_1 = \frac{1}{3}\pi\frac{b^2}{a^2}(3a^2 - 3a^2\frac{f}{e} + \frac{f^2}{e^2}a^2)$

$= \frac{\pi}{3}b^2(3 - 3\frac{f}{e} + \frac{f^2}{e^2})a$ . . . (5).

Eveneens heeft men voor de bolvormige ſchijf

$C'DD'c' = \frac{1}{3}\pi\frac{f}{e}a(3r^2 - \frac{f^2}{e^2}a^2)$ . . . (6),

en voor de elliptiſche ſchijf $CDD'c$

$\frac{1}{3}\pi\frac{f}{e}b^2(3 - \frac{f^2}{e^2})a$ . . . . . (7).

Het dubbeld van het verſchil tuſſchen de elliptiſche en bolvormige ſchijven geeft den inhoud I van het ligchaam door $DC'dQ$ voortgebragt, derhalve

$I = \frac{1}{3}\pi\frac{f}{e}(-3b^2a + \frac{f^2}{e^2}ab^2 + 3ar^2 - \frac{f^2}{e^2}a^3)$,

$= \frac{2\pi f}{3e^3}\{af^2(a^2 - e^2) + 3ar^2e^2 - a^3f^2 - 3ae^2(r^2 - f^2)\}$

$= \frac{4\pi a}{3e}f^2$ . . . . . (8).

Het verſchil tuſſchen het elliptiſch ſegment DAD' en van het bolvormig ſegment $DA'D'$ geeft den inhoud

$L = \frac{\pi}{3}(-3r^2 + 3\frac{f}{e}r^2a + \frac{f^2}{e^2}a^3 + 3b^2a - 3\frac{f}{e}b^2a + \frac{f^2}{e^2}ab^2)$

$= \frac{\pi}{3e^2}\{-3r^2e^2 + 3fer^2a - f^2a^2 + 3ae^2(r^2 - f^2)$

$- 3fea(r^2 - f^2) + f^2a(a^2 - e^2)\}$

$= \frac{2\pi}{3e}\{r^2e(a - 1) + af^2(f - e)\}$ . . . . . (9).

De inhoud van het ligchaam $CDA'D'c'd'a'd$ wordt gevonden door bij den dubbelen inhoud van de elliptiſche ſchijf $CDD'c$ het dubbeld van het bolvormig ſegment $DA'D'$ op te tellen; men vindt dus

K =

$$K = \frac{2\pi}{3e^3}\{3e^2fb^2a - f^3b^2a + 2r^3e^3 - 3ar^2fe^2 + f^3a^3\}$$

$$= \frac{2\pi}{3e^3}\{3e^2fa(r^2-f^2) - af^3(a^2-e^2) + 2r^3e^3 - 3af^2r^2 + f^3a^3\}$$

$$= \frac{4\pi}{3e}\{r^2e - f^2a\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

De formule (6) doet eene opmerkelijke eigenſchap kennen van den ring, gevormd door de omwenteling van het ſtuk DC′d C om de as Aa; deszelfs inhoud is namelijk gelijk aan het $\frac{a}{e}$ gedeelte van den inhoud van den bol, met den ſtaal f beſchreven. Maar $f^2 = r^2 - b^2$ zijnde, zoo zal CF loodregt op BC′ getrokken zijnde $CF^2 = BF^2 - CB^2 = r^2 - b^2$ wezen, en dus de bedoelde inhoud gelijk aan $\frac{a}{e}$ maal den inhoud van den bol, wiens middellijn de koorde FF′ van het ſegment is. Voor $b = BC = o$ is $e^2 = e^2$ of $\frac{a}{e} = 1$, alsdan gaat de ellips in eene enkele lijn over, en de figuur DC′d in den halven cirkel A′C′a′, onze inhoud geeft dan ook voor dat geval den inhoud van den geheelen bol.

In al het voorgaande was aangenomen, dat de verticale as van de ellips kleiner dan de horizontale was, zoo als in *Fig.* 29 is afgebeeld; doch wordt deze as grooter dan diegene, waarom de ellips wentelt, zoo als in *Fig.* 30 is voorgeſteld, dan wordt $e^2 - b^2 = e^2$ negatief even zoo als $r^2 - b^2 = f^2$; de waarde $\frac{e}{f}$ blijft wel poſitief, doch de formulen (8), (9) en (10) ondergaan hier dan echter de volgende veranderingen. Omdat f^2 negatief is, wordt (8) ook negatief, hetgeen ook blijkt dat moet gebeuren door de vergelijking van *Fig.* 29 en 30; want in de eerſte is het elliptisch ſegment van het bolvormige afgetrokken en in de tweede figuur moest het omgekeerde worden verrigt; men zal dus voor dat geval ſlechts de formule (8) van teeken hebben te doen veranderen om haar voor dat geval bruikbaar te maken, en wij hebben dus alsdan voor den inhoud I′ van den ring DC′d C (*Fig.* 30)

$$I' = \frac{4\pi a}{3e} f'^3,$$

waarin dan $f'^2 = b^2 - r^2$ is. En omdat nu hier $a^2 - b^2 = e^2$ negatief is, zoo zal voor het bijzonder geval van $b^2 = 2a^2$, $-\frac{e^2}{a^2} = 1$ zijn; en alsdan gaat de inhoud I' over in $\frac{4}{3}\pi f'^3$, dat is, ingeval in Fig. 39 de halve groote as BC tot de halve kleine staat als $\sqrt{2} : 1$, dan zal de inhoud van het ringvormig ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van de figuur DCdC' om de as Aa gelijk zijn aan den bol, welke de koorde FF' tot middellijn heeft.

Voor het ligchaam L moet nu ook het verschil juist omgekeerd genomen worden; dezelfde formule (9) kan dus hier dienen, door derzelver teekens slechts om te keeren.

Voor het ligchaam K moet bij de bolvormige schijf C'DD'c' het elliptische segment DAD' gevoegd worden, alzoo het omgekeerde als hier voren; wij vinden dus

$$K' = \frac{2\pi}{3e^3}\{3r^2e^2af - f^3a^3 + 2b^2ae^3 - 3e^2ab^2f + f^3ab^2\}$$

$$= \frac{2\pi}{3e^3}\{r^2e^2af - f^3a^3 + 2ae^3(r^2 - f^2) - 3e^2af(r^2 - f^2) + af^3(a^2 - e^2)\}$$

$$= \frac{4\pi a}{3e}\{r^2e - ef^2 + f^3\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10').$$

Deze formule kan nu ook geschreven worden

$$K' = \frac{4\pi a}{3}\left\{r^2 - f^2 + f^2\frac{f}{e}\right\}$$

$$= \frac{4\pi a}{3}\left\{r^2 - f^2\left(1 - \frac{f}{e}\right)\right\}.$$

Maar nu zal f^2 negatief zijn, en $\frac{f}{e}$ positief, doch kleiner dan de eenheid, want $\frac{f^2}{e^2} = \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2}$ zijnde, en $r^2 > a^2$ zoo is de teller kleiner dan den noemer, en derhalve zal men dan voor K' eene positieve waarde vinden. Telt men bij deze waarde die van het ligchaam I', dan vindt men den inhoud van de geheele ellipsoïde, doch in I' is $f'^2 = -f^2$; derhalve vindt men

I' +

$$I'+K'=\frac{4\pi a}{3}(r^2-f^2)=\tfrac{4}{3}\pi a b^2,$$

zoo als ook wezen moest.

LXIX. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

In het middelpunt van eene gegevene ellipsoïde is dat van eenen bol geplaatst, wiens straal men vraagt zoo de betrekking gegeven is tusschen twee der ligchamen, welke tusschen den bol en de ellipsoïde begrepen zijn?

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Dezelfde gegevens en figuren aannemende als in het voorgaande voorstel, dan zullen wij de inhouden der onderscheidene hier bedoelde ligchamen door de formulen in het voorgaande voorstel gevonden, kunnen voorstellen; wij hebben dan slechts den straal r van den bol als onbekend en daarentegen de betrekking van twee der drie aldaar beschouwde ligchamen als gegeven aan te nemen.

Beginnen wij met de grootte der assen van de ellips aan te nemen zoo als in *Fig.* 29, en nemen wij dat de betrekking $\frac{I}{L}=n$ gegeven is, dan hebben wij dadelijk de vergelijking

$$\frac{I}{L}=n=\frac{2af^2}{(a-r)r^2e+af^2(f-e)},$$

of wel $$ner^2(a-r)+naf^2(f-e)=2af^2;$$

waaruit volgt

$$f^2(an-2a)=naf^2e-ner^2(a-r),$$

maar $$f^2=(r^2-b^2)^{\frac{2}{3}},$$

zoodat deze waarde in de voorgaande vergelijking gebragt, en dezelve in het vierkant verheven te hebben, geeft

$$e^2(r^2-b^2)^2(n-2)^2=n^2e^2\{a(r^2-b^2)-r^2(a-r)\}^2$$
$$=n^2e^2(r^3-ab^2)^2.$$

Deze vergelijking ontwikkeld zijnde, geeft eene zesde magtsvergelijking voor r, waaruit dan deze onbekende bij benadering gevonden kan worden. Voor het bijzonder geval, dat het eene ligchaam het dubbeld van het andere moet zijn, of dat $n=2$ is, geeft de laatste vergelijking terstond

$$r^3=ab^2.$$

Is

Is de betrekking $\frac{I}{K} = m$ gegeven, dan hebben wij uit het voorgaande voorstel

$$\frac{I}{K} = m = \frac{af^3}{r^3 e - f^3 a},$$

waaruit wij vinden

$$m(r^3 e - f^3 a) = af^3,$$

of $$f^3 (am + a) = mr^3 e,$$

en voor f^3 zijne waarde stellende

$$a^3 (r^2 - b^2)^3 (m+1)^3 = m^2 r^6 e^2.$$

Hetwelk wederom ontwikkeld zijnde, eene zesde magtsvergelijking doch van den derden magtsvorm, zal opleveren. Bijzondere waarden voor m geven ook eenvoudiger uitkomsten.

Is eindelijk de betrekking

$$\frac{L}{K} = p = \frac{r^2 e(a-r) + af^2(f-e)}{r^3 e - f^3 a},$$

gegeven, dan hebben wij even als hier voren

$$p(r^3 e - f^3 a) = aer^2 - er^3 + af^3 - aef^2,$$

en stellende voor f zijne waarde

$$(r^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} (a + pa) = r^3 e(p+1) - aeb^2,$$

en dus $$a^2 (1+p)^2 (r^2 - b^2)^3 = e^2 \{r^3 (p+1) - ab^2\}^2.$$

Waaruit r ontwikkeld en door benadering gevonden kan worden.

Indien men de ellips om hare kleine as doet omwentelen, dan moeten de formulen voor I', K' en L' van het voorgaande voorstel gebruikt worden; doch de uitkomsten, welke men alsdan verkrijgt, hebben zoo veel overeenkomst met de voorgaanden, dat wij het onnoodig achten dezelve hier nader af te leiden.

LXX. VOORSTEL. (*)

Door K. SMIT.

Zeven kooplieden hebben gemeenschappelijk eene winst gehad, die zich tot hunne ingelegde kapitalen in dezer voege verhoudt. Addeert men tot den inleg van A, B, C *en* D *de drievoudige winst, zoo is die som vijfmaal zoo veel als de inleg van* E, F *en* G. *Tot de hoofdsom van* B, C, D *en* E *de winst driemaal geaddeerd, komt* 5$\frac{1}{2}$ *maal zoo veel als* F, G *en* A. *Tot* C, D, E *en* F *de drievoudi-*

(*) P. HALCKEN, *Sinnen confect*, No. 68.

dige winst geaddeerd komt $6\frac{1}{2}$ *maal zoo veel als* G, A *en* B. *Tot* D, E, F *en* G *het drievoud van de winst geaddeerd komt* $6\frac{1}{2}$ *maal zoo veel als* A, B *en* C. *Tot* E, F, G *en* A *de drievoudige winst geaddeerd, komt zeven maal zoo veel als* B, C *en* D. *Tot* F, G, A *en* B *de winst driemaal geaddeerd komt* $7\frac{1}{2}$ *maal zoo veel als* C, D *en* E. *Tot* G, A, B *en* C *de drievoudige winst geaddeerd, komt achtmaal zoo veel als* D, E *en* F. *Na aftrek van* 900 *gulden verdeelen zij het overige behoorlijk onder elkander, zoodat* A 636 *gulden meerder winst ontvangt dan* D. *Men vraagt naar ieders inleg en kapitaal?*

Opgelost *door* K. Smit *en* J. Bassan.

Oplossing *van* K. Smit.

Stellende den inleg van A, a, van B, b en zoo voorts, verder de geheele inleg $= s$ en de geheele winst $= w$, dan hebben wij volgens het vraagstuk de volgende vergelijkingen

$$3w+a+b+c+d=5(e+f+g),$$
$$3w+b+c+d+e=\tfrac{41}{7}(f+g+a),$$
$$3w+c+d+e+f=\tfrac{33}{5}(g+a+b),$$
$$3w+d+e+f+g=\tfrac{13}{2}(a+b+c),$$
$$3w+e+f+g+a=7(b+c+d),$$
$$3w+f+g+a+b=\tfrac{43}{6}(c+d+e),$$
en $$3w+g+a+b+c=8(d+e+f).$$

Bij de beide leden van elke dezer vergelijkingen zoo veel bijtellende, dat het eerste lid wordt $3w+a+b+c+d+e+f+g=3w+s$, dan hebben wij

$$\left.\begin{array}{ll}
3w+s=6(e+f+g), & \text{of } e+f+g=\tfrac{1}{6}s+\tfrac{1}{2}w\\
3w+s=\tfrac{48}{7}(f+g+a), & \text{of } f+g+a=\tfrac{7}{48}s+\tfrac{21}{48}w\\
3w+s=\tfrac{36}{5}(g+a+b), & \text{of } g+a+b=\tfrac{5}{31}s+\tfrac{15}{36}w\\
3w+s=\tfrac{15}{2}(a+b+c), & \text{of } a+b+c=\tfrac{2}{15}s+\tfrac{6}{15}w\\
3w+s=8(b+c+d), & \text{of } b+c+d=\tfrac{1}{8}s+\tfrac{3}{8}w\\
3w+s=\tfrac{49}{7}(c+d+e), & \text{of } c+d+e=\tfrac{7}{60}s+\tfrac{21}{60}w\\
\text{en } 3w+s=9(d+e+f), & \text{of } d+e+f=\tfrac{1}{9}s+\tfrac{1}{3}w
\end{array}\right\}\ .\ (a).$$

De som dezer laatste vergelijkingen geeft

$$3s=\tfrac{15}{10}s+\tfrac{45}{10}w,$$

waaruit volgt

$$33s=45w,$$

dat is

$$w=\tfrac{11}{15}s,$$

Van

Van deze winst afgetrokken de som van 900 gulden, zoo blijft de te verdeelene winst

$$w - 900 = \tfrac{11}{15} s - 900.$$

Verbindt men nu verder de twee vergelijkingen hier boven gevonden

$$a + b + c = \tfrac{4}{15} s + \tfrac{2}{5} w,$$

en

$$b + c + d = \tfrac{1}{3} s + \tfrac{3}{8} w,$$

door aftrekking, dan vindt men

$$a - d = (\tfrac{2}{15} - \tfrac{1}{8}) s + (\tfrac{2}{5} - \tfrac{3}{8}) w$$
$$= (\tfrac{16}{120} - \tfrac{15}{120}) s + (\tfrac{2}{5} - \tfrac{3}{8}) \tfrac{11}{15}) s$$
$$= \tfrac{2}{75} s.$$

De winst a' van A moet uit de evenredigheid

$$a : a' = s : w - 900 = s : \tfrac{11}{15} s - 900$$

gevonden worden, en even eens vindt men voor de winst d' van D

$$d : d' = s : \tfrac{11}{15} s - 900.$$

Uit deze beide evenredigheden volgt

$$a' = \frac{a}{s} (\tfrac{11}{15} s - 900),$$

en

$$d' = \frac{d}{s} (\tfrac{11}{15} s - 900);$$

het verschil dezer winst 636 gulden bedragende, zoo hebben wij, door deze laatste vergelijkingen van elkander af te trekken,

$$a' - d' = 636 = \frac{a - d}{s} (\tfrac{11}{15} s - 900),$$

of ook omdat $75 (a - d) = 2 s$ is,

$$636 = \tfrac{2}{75} (\tfrac{11}{15} s - 900),$$

of

$$22 s = 742500,$$

dat is

$$s = 33750,$$

de geheele winst $33750 \times \tfrac{11}{15} = 24750 = w$,

de te verdeelene winst 23750, derhalve het verschil van den inleg van A en D

$$a - d = 800.$$

Brengt men nu de waarde van s en w in het stelsel van vergelijkingen (α), dan vindt men

$$e + f + g = 5625 + 12375 = 18000$$
$$f + g + a = 15750,$$
$$g + a + b = 15000,$$

$a +$

$$a+b+c=9000,$$
$$b+c+d=13500,$$
$$c+d+e=12600,$$
$$d+e+f=12000.$$

Door op- en aftrekking dezer vergelijkingen twee aan twee, vindt men nu gemakkelijk voor den inleg van

A $a=2250$ dus de winst $a'=1590$,
B $b=5400$ — — — $b'=3816$,
C $c=6750$ — — — $c'=4770$,
D $d=1350$ — — — $d'=954$,
E $e=4500$ — — — $e'=3180$,
F $f=6150$ — — — $f'=4346$,
en G $g=7350$ — — — $g'=5194$.

LXXI. VOORSTEL. (*)

Door K. SMIT.

Zes kooplieden hebben te zamen eene partij rogge gekocht en betaald; de som van a, b en c is gelijk aan de som van d en e+400; van b, c en d gelijk aan e+f+550; van c, d en e=f+a+600; van d, e en f gelijk aan a+b+750; van e, f en a gelijk b+c+800; en de som van f, a en b gelijk aan c+d+900. Vrage hoe veel de rogge gekost en ieder daartoe betaald heeft?

OPGELOST *door* K. SMIT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

De voorwaarden van het vraagstuk geven onmiddelijk de volgende vergelijkingen

$$a+b+c=d+e+400 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$
$$b+c+d=e+f+550 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$
$$c+d+e=f+a+600 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$
$$d+e+f=a+b+750 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$
$$e+f+a=b+c+800 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$
$$f+a+b=c+d+900 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

De som der vergelijkingen (1) en (4) geven

$$c+f=1150 \quad . \quad . \quad (7),$$

die van (2) en (5) $a+d=1350 \quad . \quad . \quad (8),$

die

(*) P. HALCKE, *Sinnen confect*. No 69.

die van (3) en (6) $b+e=1500$ . . (9);
die van (1), (3) en (5) $a+c+e=1800$ . . (10),
en die van (2), (4) en (6) $b+d+f=2200$ . . (11).
De ſom der vier eerſte geeft voor den prijs der rogge

$$a+b+c+d+e+f=4000.$$

De ſom der vergelijkingen (9) en (10) geeft

$$a+b+c+2e=3300,$$

en (1) geeft $a+b+e=400+d+e,$
derzelver verſchil is $2e=2900-d-e,$
of $d=2900-3e.$
De vergelijking (9) geeft $b=1500-e.$
De vergelijking (8) $a=350-d=-1550+3e.$
De vergelijking (11) $f=2200-d-b=-2200+4e.$
De vergelijking (7) $c=110-f=3350-4e.$
Het verſchil van (4) en (5) is

$$a-d=c-a+50,$$

of $2a-d=c+50.$

Voor a, c en d hunne waarde uit de voorgaande vergelijkingen ſtellende, komt er

$$13e=9400,$$

of $e=723\frac{5}{13}$,
waardoor nu terſtond uit de voorgaande vergelijkingen gevonden wordt $a=619\frac{8}{13}$, $b=776\frac{12}{13}$, $c=457\frac{8}{13}$, $d=730\frac{10}{13}$ en $f=692\frac{4}{13}$.

LXXII. VOORSTEL. (*)

Door K. SMIT.

Vijf ruiters hebben zekere ſom dukaten buit gemaakt, de ſom van A, B *en* C *vermenigvuldigd met de ſom van* D *en* E *gelijk s zijnde, zoo is de ſom van* B, C *en* D *vermenigvuldigd met de ſom van* E *en* A *gelijk aan* $s+1776$. *De ſom van* C, D *en* E *vermenigvuldigd met de ſom van* A *en* B *geeft* $s+2400$. *De ſom van* D, E *en* A *vermenigvuldigd met de ſom van* B *en* C *geeft* $s+2280$. *De ſom van* E, A *en* B *vermenigvuldigd met de ſom van* C *en* D *geeft* $s+1440$. *Het kwadraat van* B *gaat dat van* D 1840 *te boven. Vrage naar ieders aandeel?*

Op-

(*) P. HALCKEN, *Sinnen confect*, No. 74.

OPGELOST *door* K. SMIT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Het aandeel van elk der vuiters door a, b, c, d en e voorstellende, zoo geeft het voorstel de volgende vergelijkingen, wanneer ϕ den geheelen buit voorstelt

$$(\phi-(d+e))(d+e)=s,$$
$$(\phi-(e+a))(e+a)=s+1776,$$
$$(\phi-(a+b))(a+b)=s+2400,$$
$$(\phi-(b+c))(b+c)=s+2280,$$
$$(\phi-(c+d))(c+d)=s+1440.$$

Uit deze vergelijkingen volgt

$$d+e=\tfrac{1}{2}\phi\pm V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s),$$
$$e+a=\tfrac{1}{2}\phi\pm V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776),$$
$$a+b=\tfrac{1}{2}\phi\pm V(\tfrac{2}{4}\phi^2-s-2400),$$
$$b+c=\tfrac{1}{2}\phi\pm V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2280),$$
en $$c+d=\tfrac{1}{2}\phi\pm V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1440).$$

Omdat $\phi-(e+a)=b+c+d$ is, zoo volgt uit de tweede dezer uitkomsten

$$b+c+d=\tfrac{1}{2}\phi\mp V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776),$$

hiervan afgetrokken

$$c+d=\tfrac{1}{2}\phi\pm V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1440),$$

geeft $b=\mp V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)\mp V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1440)$,
en er aftrekkende $b+c=\tfrac{1}{2}\phi\pm V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2280)$,
komt er $d=\mp V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)\mp V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2280)$.

Het verschil der vierkanten dezer beide vergelijkingen is

$$b^2-d^2=2V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)\{V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1440)-V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2280)\}$$
$$+\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1440-\tfrac{1}{4}\phi^2+s+2280,$$

of $$b^2-d^2=2V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)\{V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1440)$$
$$-V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2280)\}+840.$$

Maar volgens het voorstel is $b^2-d^2=1840$, derhalve hebben wij

$$\frac{1840-840}{2}=500=V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)$$
$$\{V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1440)-V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2280)\},$$

waarvan het vierkant is

$$250000=(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)\{\tfrac{1}{4}\phi^2+2s-3720-2V(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1440)$$
$$(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2280)\},$$

$$250000-(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-3720)=-2(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1440)(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2280)}.$$

Deze vergelijking wederom in het vierkant gebragt en herleid, geeft men

$$46(\tfrac{1}{4}\phi^2-s)^4-176517(\tfrac{1}{4}\phi^2-s)^2+15863647^1=0,$$

waaruit volgt $(\tfrac{1}{4}\phi^2-s)^2=2401,$

en $$(\tfrac{1}{4}\phi^2-s)^2=\frac{6071}{46}.$$

Derhalve wordt

$$b=\mp\{\sqrt{(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)}+\sqrt{(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1440)}\}$$
$$=\mp\{\sqrt{625}+\sqrt{961}\}=\mp(25+31)=\mp 56,$$

waarvan alleen het benedenste teeken hier behoeft gebruikt te worden. De tweede waarde van $(\tfrac{1}{4}\phi^2-s)^2$ geeft voor b onbestaanbare waarden.

Verder vindt men

$$d=\mp\{\sqrt{(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)}+\sqrt{(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2280)}\}$$
$$=\mp\{\sqrt{625}+\sqrt{121}\}=\mp(25+11)=\mp 36,$$

alzoo $$d=36.$$

Ook hebben wij reeds gevonden

$$d+e=\tfrac{1}{2}\phi\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}\phi^2-s)}=\tfrac{1}{2}\phi\pm 49,$$

en $$e+a=\tfrac{1}{2}\phi\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)}=\tfrac{1}{2}\phi\pm 25,$$

deze van elkander afgetrokken, geven

$$d-a=\pm(49-25)=\pm 24,$$

dus $$a=\mp 36\mp 24=60,$$

omdat wij hier geene negatieve waarde voor a kunnen nemen.

Trekt men de twee vergelijkingen

$$e+a=\tfrac{1}{2}\phi\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-1776)}=\tfrac{1}{2}\phi\pm 25,$$

en $$a+b=\tfrac{1}{2}\phi\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2400)}=\tfrac{1}{2}\phi\pm 1,$$

van elkander af, dan vindt men

$$e-b=\pm 24,$$

en $$e=\pm 24+b=\pm 24\pm 56=32.$$

Trekt men nu eindelijk van

$$a+b=\tfrac{1}{2}\phi\mp 1,$$
$$b+c=\tfrac{1}{2}\phi\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}\phi^2-s-2280)}=\tfrac{1}{2}\phi\pm 11,$$

dan komt er $$a-c=\pm 1\mp 11,$$

en $$c=a\mp 1\pm 11=60\mp(1-11)=50,$$

waardoor dan nu elks aandeel en derhalve ook de geheele buit bekend is.

LXXIII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

De zon gepeild in het zuidoosten 54°, en daarna in het zuidzuidoosten 59° 50', zoo vraagt men naar de poolhoogte en zondeclinatie?

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Laat in *fig.* 31 ZTN het vlak van den meridiaan zijn, P de pool, T het zenith van de plaats der waarnemingen, LE het vlak van de evennachtslijn, en ZN dat van den horizon; laten verder DT en FT de projectie op het vlak van den meridiaan zijn der verticaal-cirkels, waarin de zon is waargenomen, en A en B de projectie der waargenomene zonneſtanden; indien dan de verandering der zondeclinatie gedurende de beide waarnemingen niet in aanmerking komt, dan is AB het vlak van den zonsparallelcirkel, zoodat AB evenwijdig aan LE is. Nu hebben wij volgens de opgave

$$IO = BH = GQ = Sin.\ 54^\circ = 80902,$$
$$OK = AG = Sin\ 59^\circ\ 50' = 86457,$$

dus $AQ = 5555.$

Verder is $BI = Cos\ 54^\circ \times Cos.\ 45^\circ = 41563,$

en $QI = AK = Cos.\ 59^\circ\ 50' \times Cos.\ 22^\circ\ 30' = 46427,$

derhalve $BQ = QI - BI = 4864.$

Hieruit volgt

$$Tang.\ hoek\ ABQ = \frac{AQ}{QB} = \frac{5555}{4864},$$

dus *hoek* ABQ $= 48^\circ\ 48'$,

en derhalve *hoek* LOT $= 41^\circ\ 12'$ noorder breedte.

De lijn VO is de sinus van de zondeclinatie; deze hebben wij dus nog te berekenen.

Omdat nu *hoek* BXO $=$ ABQ $= 48^\circ 48'$ is, zoo is

$$HX = BH \times Cot.\ ABQ,$$

$$= 80902 \times \frac{4864}{5555} = 70825,$$

en daar wij hebben $BI = OH = 41563,$

zoo is $OX = 29262,$

en dus $OV = OX\ Sin.\ VXO$,

$= 29262\ Sin.\ 48° 48'$,

$= 22017$,

waarvan de ſinus is $12° 43'$, welke alzoo de waarde der zons-declinatie is.

LXXIV. VOORSTEL

Door K. SMIT.

De zonshoogte was des morgens te 6 ure 15°, en hare hoogte in het oosten 23° 30'. Men vraagt naar de poolshoogte en zons-declinatie? (*)

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Laat wederom in *Fig.* 32 de cirkel ZTN het vlak van den meridiaan voorſtellen, T het zenith, ZN het vlak van den horizon, LE dat van de evennachtslijn, A den zonneſtand in het oosten, en daar te zes ure de zon zich bevindt in het verticale vlak loodregt op den meridiaan, zoo is alsdan de zon ergens in OP; zij dan de zon in S en dus de zonshoogte DS gegeven. De lijn MC is dan het vlak van den zonsparallelcirkel, en alzoo evenwijdig aan LE. Trekkende verder de loodlijnen SB en SD, dan is in den regthoekigen driehoek ASO

$$OS = \sqrt{OA \times OB} = \sqrt{OA \times DS}$$
$$= \sqrt{(Sin.\ 23° 30' \times Sin.\ 15°)} = 32125,$$

en daar OS de ſinus van de zonsdeclinatie voorſtelt, zoo is deze declinatie,

$$32125 = Sin.\ 18° 44'$$

zijnde, $18° 44'$.

Verder is $Sin.\ BSO = \frac{OB}{OS} = 25882$,

of $BSO = 53° 40' 30''$ noorder poolshoogte.

LXXV. VOORSTEL.

Door H. STROOTMAN.

Iemand raadde een gedacht getal toen hem de resten der deelingen door 3, 5 en 7 gezegd waren; men vraagt naar den regel hiertoe vereischt?

OPGELOST *door* H. STROOTMAN *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* H. STROOTMAN.

Het voorgeſtelde vraagſtuk zou opgelost zijn, zoodra men een ge-

(*) P. HALCKEN, *Sinnen oefeet*, No 549.

getal kan bepalen als de overschotten zijner deeling door 3, 5 en 7 gegeven zijn. Laten wij de mogelijkheid hiervan onderzoeken. Het getal $= x$ zijnde, zoo stellen wij de resten der deelingen door a, b en c voor. Is het getal zonder overschot deelbaar door 3, 5 en 7, dan is hetzelve een veelvoud van $3.5.7 = 105$. Wordt hetzelve door 3 gedeeld en geeft dan eene rest a, zoo kan het getal van den vorm $105m + (3n+1)a$ zijn, waarin n elk willekeurig geheel positief of negatief getal kan wezen, mits slechts $(3n+1)a < 105m$ zij. Op dezelfde wijze zal de rest der deeling door $5 = b$ wezen, zoodra het getal van den vorm $105m + (5p+1)b$ is; en ook c tot rest geven bij de deeling door 7, zoo hetzelve van den vorm $105m + (7q+1)c$ is. Is nu daarenboven $(3n+1)a$ deelbaar door 5 en 7, $(5p+1)b$ deelbaar door 3.7, en $(7q+1)c$ deelbaar door 3×5, dan zal het getal

$$x = 105m + (3n+1)a + (5p+1)b + (7q+1)c$$

aan de gestelde voorwaarden voldoen; namelijk van bij de deeling door 3, 5 en 7 resten a, b en c op te leveren. Omdat dan $(3n+1)a$ deelbaar door 5 en 7 moet zijn, en dat a slechts 0, 1 of 2 kan wezen, zoo moet $3n+1$ door 35 deelbaar zijn. Daartoe stellen wij

$$\frac{3n+1}{35} = r - 2,$$

waaruit volgt $3n = 35r + 69$,

of $n = \frac{35}{3}r + 23$,

door dus voor r een veelvoud van 3 te nemen, zal voor n een geheel getal gevonden worden, aan de gestelde voorwaarden voldoende, kunnende men zelfs r negatief nemen.

Verder moet $(5p+1)b$ of, daar b over het algemeen niet deelbaar door 3 en 7 zal wezen, ook $5p+1$ door 21 deelbaar zijn. Stellende dan

$$\frac{5p+1}{21} = s + 1,$$

dat is $5p = 21s + 20$,

of $p = \frac{21}{5}s + 4$.

Nemende dan voor s een positief of negatief veelvoud van 5, zoo zal p aan de voorwaarde voldoen.

Eindelijk moet dan ook $7q+1$ door 15 deelbaar wezen, daartoe ſtellen wij dan

$$\frac{7q+1}{15} = u+1,$$

dus $q = \frac{15}{7}u+2,$

en voor u een veelvoud van 7 nemende, wordt ook hier aan de voorwaarde voldaan. Men mag dan ſchrijven voor het gevraagde getal

$$x = 105m+(35r+70)a+(21s+21)b+(15u+15)c,$$

en zoo lang men dan ſlechts voor m, r, s en u willekeurige geheele getallen neemt, zoo zal het getal bij de deeling door 3, 5 en 7 reſpectivelijk de resten a, b en c geven. Hieruit volgt dan eindelijk, dat het onmogelijk is alleen uit de kennis der getallen a, b en c de waarde van x uit de voorſtaande vergelijking te vinden. Bij voorbeeld, men ſtelle eens r, s en $u = 0$, dan wordt het getal

$$x = 105m+70a+21b+15c,$$

dan zal, zoo lang m niet gegeven is, het getal x niet gevonden kunnen worden. Indien eens het gedachte getal 10 was, dan waren $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$, en wij vinden

$$x = 105m+70+60;$$

ſtelt men $m = 0$ dan vindt men 130, hetwelk aan de geſtelde voorwaarde voldoet, doch het getal 10 niet oplevert. Neemt men $m = 1$, zoo vindt men 235 ook aan de voorwaarden voldoende, zonder aan de vraag te voldoen. Neemt men $m = -1$, dan vindt men $x = 25$, wederom bij de deeling door 3, 5 en 7 de resten 1, 0 en 4 gevende, zoodat het hieruit genoegzaam blijkt, dat het onmogelijk is, om enkel uit de resten der deeling door 3, 5 en 7 het bedoelde getal af te leiden.

LXXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar drie getallen, wier verſchillen vierkanten zijn, en zoo dat de ſom dezer vierkanten eene derde magt zij?

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten de drie vierkanten zijn

$$x^2, \quad x^2y^2 \quad \text{en} \quad x^2z^2,$$

dan moet de ſom

$$s =$$

$$s = x^2(1+y^2+z^2) \quad \ldots\ldots (1),$$

eene derde magt wezen; en hieraan zal voldaan worden, door $1+y+z^2=x$ en voor y of z willekeurige geheele getallen te nemen. Stellen wij dan verder voor de gevraagde getallen

$$p,\ p+x^2 \text{ en } p+x^2y^2+x^2.$$

Het verſchil der eerſte en laatſte is dan $x+x^2y^2$, doch volgens het bovengeſtelde moet dit verſchil x^2z^2 zijn, wij hebben dus de vergelijking

$$x^2+y^2x^2=x^2z^2,$$

of $$1+y^2=z^2,$$

hetwelk in (1) geſteld, geeft

$$s=2x^2(1+y^2).$$

Maar wij hebben nog geſteld

$$x=1+y^2+z^2,$$

en dit verandert door voor z^2 zijne waarde te ſtellen, in

$$x=2(1+y^2),$$

waardoor dus $$s=8(1+y^2)^3$$

wordt. Nemende dan y en p naar willekeur, zoo zal aan de vraag voldaan worden. Bij voorbeeld, voor $y=1$ en $p=2$ wordt $x=1+1=2$, derhalve het eerſte getal $p=2$, het tweede $p+x^2=6$ en het derde $2+4+4=10$.

LXXVII. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Men vraagt naar drie getallen, zoodanig, dat het product dezer getallen een vierkant en de ſom van de vierkanten der getallen eene derde magt zij?

Oplossing *van* J. Bassan.

Stel voor de drie getallen x, px en qx, dan zijn de vierkanten x^2, p^2x^2 en q^2x^2, waarvan de ſom

$$x^2(1+p^2+q^2)$$

eene derde magt moet zijn. Stellen wij daarom

$$1+p^2+q^2=x.$$

Verder moet het product pqx^3 een vierkant wezen, dat is, pqx moet een vierkant worden. Maar volgens de voorgaande vergelijking is

$$qpx=qp(1+p^2+q^2).$$

Neemt men nu $pq = p^2r^2$ of $q = pr^2$, dan wordt het tweede lid der laatſte vergelijking

$$1 + p^2 + p^2r^4,$$

en dit zal een vierkant worden zoo $p^2 = 2pr^2$ of $p = 2r^2$ geſteld wordt. Alsdan hebben wij

$$pqx = 4r^2(1 + 2r^4)^2,$$

Verder is dan $x = 1 + p^2 + q^2 = 1 + 4r^4 + p^2r^4,$

$$= 1 + 4r^4 + 4r^8 = (1 + 2r^4)^2,$$

en de drie getallen zijn

$$(1 + 2r^4)^2,\ 2r^2(1 + 2r^4)^2 \text{ en } 2r^4(1 + 2r^4)^2,$$

Voor $r = 2$ heeft men dus 1089, 8712 en 34848.

LXXVIII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

De ouderdom van twee vrienden is zoodanig, dat de ſom hunner jaren een vierkant is, welks wortel het verſchil hunner jaren is; doch verheft men de jaren van elk hunner tot de tweede magt, dan is het dubbeld verſchil dezer vierkanten wederom eene tweede magt, waarvan de wortel de halve ſom hunner jaren is. Vrage naar hunnen ouderdom?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. BASSAN *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stel den ouderdom des eenen $x - y$ en dien des anderen $x + y$, dan moet, volgens de eerſte voorwaarde van het voorſtel, de ſom $2x$ der jaren een vierkant wezen, welks wortel het verſchil zij der jaren, derhalve

$$2x = 4y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Het dubbeld verſchil der vierkanten van elks jaren is

$$2(x + y)^2 - 2(x - y)^2 = 8xy,$$

en dit moet volgens de tweede voorwaarde een vierkant zijn, welks wortel de halve ſom x der jaren bedraagt, dus

$$8xy = x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

of $$2x = 16y,$$

hetwelk met (1) verbonden geeft

$$4y^2 = 16y,$$

of $$y = 4,$$

dus $$2x = 16y = 64,$$

of

of $x = 32$.

De onderdom des eenen is dus $x+y=36$ en die des anderen $x-y=28$ jaren.

LXXIX. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Iemand koopt en verkoopt eenige koopwaren voor een zeker geheel aantal guldens, waarvan de ſommen op de volgende wijze bepaald zijn. Wanneer men hunnen koopprijs tot de derde magt verhe ft en hierbij het vierkant van den koopprijs voegt, dan is deze ſom 5½ maal grooter dan wanneer men den koop- en verkoopprijs met elkander vermenigvuldigt. Men vraagt naar den koop- en verkoopprijs?

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stel den inkoopprijs $= x$ en den verkoopprijs xy, dan is volgens het voorſtel

$$x^3 + x^2y^2 = 5\tfrac{1}{2}x^2y,$$

of $$x + y^2 = \tfrac{11}{2}y,$$

dus $$x = \tfrac{11}{2}y - y^2 = y(\tfrac{11}{2} - y).$$

Nu kan men voor y elke willekeurige waarde in geheele getallen nemen, mits x ſlechts niet negatief worde, dus moet y kleiner dan $\frac{11}{2}$ of kleiner dan 6 wezen; en zal verder het antwoord in geheele getallen moeten zijn, zoo moet y een even getal wezen. Men kan dan ſlechts $y = 2$ en $y = 4$ nemen, waardoor dus de twee waarden $x = 7$ en $x = 6$ gevonden worden, zoodat de inkoopprijs zijnde 7 gulden, de verkoopprijs is 14 gulden; en de inkoopprijs zijnde 6 de verkoopprijs 24 gulden wordt.

LXXX. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

De naam van zekere voorname ſtad beſtaat uit tien letters, die, wanneer men de letters van het Nederduitsch alphabet achtervolgens door 1, 2 *enz. aanwijst, de volgende eigenſchappen hebben.*

De derde en vierde letter zijn dezelfde, de ſom van de 2*e en* 3*e is gelijk aan de* 6*e. De ſom van de* 5*e*, 6*e en* 10*e is gelijk aan de* 7*e en* 8*e; ook is de ſom der* 1*e*, 2*e*, 3*e en* 8*e letter gelijk aan die der zes overigen; de laatſte letter is een trigonaal, welks wortel of zijde de* 4*e is.*

De 2*e letter is het dubbeld der vijfde. De ſom van de beide*

eerſten is gelijk aan die der 5e en 9e; de ſom der 2e, 4e en 6e is een pentagonaal, welks wortel de 5e letter is. Vermenigvuldigt men de 5e met 4 en voegt er de 7e bij, dan is deze ſom een hexagonaal, welks wortel de ſom der 3e en 4e letter is. Eindelijk is de helft der ſom van de 5e, 6e, 7e en 8e letter een zevenhoekig getal, welks zijde de derde is. Men vraagt naar den naam dier ſtad?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stellen wij, om tevens aan de eerſte bepaling van het voorſtel te voldoen, den naam der ſtad voor door de letters

$$m, n, p, p, u, v, w, x, y \text{ en } z,$$

dan heeft men, naar aanleiding des voorſtels, de volgende vergelijkingen

$$n+p=v \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$
$$u+v+z=w+x \quad \ldots\ldots\ldots (2),$$
$$m+n+p+x=p+u+v+w+y+z \quad \ldots (3),$$
$$z=\frac{p(p+1)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (4),$$
$$n=2u \quad \ldots\ldots\ldots (5),$$
$$m+n=y+u \quad \ldots\ldots\ldots (6),$$
$$2(n+p+v)=u(3u-1) \quad \ldots\ldots (7),$$
$$4y+w=2p(4p-1) \quad \ldots\ldots (8),$$

en

$$\frac{u+v+w+x}{2}=\frac{p(5p-3)}{2} \quad \ldots\ldots (9).$$

De vergelijkingen (2) en (6) bij elkander tellende en daarvan (3) aftrekkende, komt er

$$u=2w \quad \ldots\ldots\ldots (10).$$

En (1) van (7) aftrekkende, komt er

$$2v=\frac{u(3u-1)}{2},$$

of

$$v=\frac{u(3u-1)}{4} \quad \ldots\ldots (11).$$

De waarde van u in (5) en (11) ſtellende, zoo komt er

$$n=4w \quad \ldots\ldots\ldots (12),$$

en

$$v=\frac{w(6w-1)}{2} \quad \ldots\ldots (13).$$

Deze waarden in (1) ſtellende, zoo vindt men na herleiding

$$p=$$

$$p = \frac{8w(2w-3)}{2} \quad \ldots\ldots (14).$$

De vergelijking (4) van (2) aftrekkende, blijft er over na ontwikkeling

$$x = \frac{p(p+1)}{2} + u + v + w \quad \ldots\ldots (15).$$

De vergelijking (15) tweemaal genomen, afgetrokken van viermaal de vergelijking (9), dan blijft er over

$$4(u+v) = p(9p-7).$$

Hierin de waarden van p, u en v gesteld, komt er

$$12w^2 + 6w = \frac{324w^4 - 972w^3 + 645w^2 + 126w}{4},$$

of door w deelende en met 4 vermenigvuldigende, zoo heeft men

$$48w + 24 = 324w^3 - 972w^2 + 645w + 126,$$

of $$108w^3 - 324w^2 + 199w + 34 = 0.$$

De positieve wortel dezer vergelijking is

$$w = 2,$$

overeenkomende met de letter B. Deze waarde in (10), (12), (13) en (14) stellende, vindt men

$u = 4$ overeenkomende met E,

$n = 8$ » » I,

$v = \frac{2(12-1)}{2} = 11$ » » L,

$p = \frac{6(4-3)}{2} = 3$ » » D,

De waarden van p, u, v en w in (15) gesteld, geeft

$x = \frac{3(3+1)}{2} + 4 + 11 - 2 = 19$ overeenkomende met U.

De waarden van p en w in (8) gesteld, geven

$$4y = 2p(4p-1) - w = 6(12-1) - 2 = 64,$$

of $y = 16$ overeenkomende met R.

Eindelijk de waarden van n, u en y stellende in (6), alsmede die van p in (4), zoo komt er

$m = 16 + 4 - 8 = 12$ overeenkomende met M,

en $s = \frac{3(3+1)}{2} = 6$ overeenkomende met G.

De naam van de stad is dus MIDDELBURG.

LXXXI.

Neemt men nu $pq = p^2r^2$ of $q = pr^2$, dan wordt het tweede lid der laatſte vergelijking

$$1 + p^2 + p^2r^4,$$

en dit zal een vierkant worden zoo $p^2 = 2pr^2$ of $p = 2r^2$ geſteld wordt. Alsdan hebben wij

$$pqx = 4r^2(1 + 2r^4)^2,$$

Verder is dan $x = 1 + p^2 + q^2 = 1 + 4r^4 + p^2r^4,$

$$= 1 + 4r^4 + 4r^8 = (1 + 2r^4)^2,$$

en de drie getallen zijn

$(1 + 2r^4)^2$, $2r^2(1 + 2r^4)^2$ en $2r^4(1 + 2r^4)^2$.

Voor $r = 2$ heeft men dus 1089, 8712 en 34848.

LXXVIII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

De ouderdom van twee vrienden is zoodanig, dat de ſom hunner jaren een vierkant is, welks wortel het verſchil hunner jaren is; doch verheft men de jaren van elk hunner tot de tweede magt, dan is het dubbeld verſchil dezer vierkanten wederom eene tweede magt, waarvan de wortel de halve ſom hunner jaren is. Vrage naar hunnen ouderdom?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. BASSAN *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stel den ouderdom des eenen $x - y$ en dien des anderen $x + y$, dan moet, volgens de eerſte voorwaarde van het voorſtel, de ſom $2x$ der jaren een vierkant wezen, welks wortel het verſchil zij der jaren, derhalve

$$2x = 4y^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Het dubbeld verſchil der vierkanten van elks jaren is

$$2(x + y)^2 - 2(x - y)^2 = 8xy,$$

en dit moet volgens de tweede voorwaarde een vierkant zijn, welks wortel de halve ſom x der jaren bedraagt, dus

$$8xy = x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

of $$2x = 16y,$$

hetwelk met (1) verbonden geeft

$$4y^2 = 16y,$$

of $$y = 4,$$

dus $$2x = 16y = 64,$$

of

of $x = 32$.

De ouderdom des eenen is dus $x+y=36$ en die des anderen $x-y=28$ jaren.

LXXIX. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Iemand koopt en verkoopt eenige koopwaren voor een zeker geheel aantal guldens, waarvan de ſommen op de volgende wijze bepaald zijn. Wanneer men hunnen koopprijs tot de derde magt verhoogt en hierbij het vierkant van den koopprijs voegt, dan is deze ſom 5½ maal grooter dan wanneer men den koop- en verkoopprijs met elkander vermenigvuldigt. Men vraagt naar den koop- en verkoopprijs?

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stel den inkoopprijs $= x$ en den verkoopprijs xy, dan is volgens het voorſtel

$$x^3 + x^2y^2 = 5\tfrac{1}{2}x^2y,$$

of $$x + y^2 = \tfrac{11}{2}y,$$

dus $$x = \tfrac{11}{2}y - y^2 = y(\tfrac{11}{2} - y).$$

Nu kan men voor y elke willekeurige waarde in geheele getallen nemen, mits x ſlechts niet negatief worde, dus moet y kleiner dan $\frac{11}{2}$ of kleiner dan 6 wezen; en zal verder het antwoord in geheele getallen moeten zijn, zoo moet y een even getal wezen. Men kan dan ſlechts $y = 2$ en $y = 4$ nemen, waardoor dus de twee waarden $x = 7$ en $x = 6$ gevonden worden, zoodat de inkoopprijs zijnde 7 gulden, de verkoopprijs is 14 gulden; en de inkoopprijs zijnde 6 de verkoopprijs 24 gulden wordt.

LXXX. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

De naam van zekere voorname ſtad beſtaat uit tien letters, die, wanneer men de letters van het Nederduitsch alphabet achtervolgens door 1, 2 *enz. aanwijſt, de volgende eigenſchappen hebben.*

De derde en vierde letter zijn dezelfde, de ſom van de 2*e en* 3*e is gelijk aan de* 6*e. De ſom van de* 5*e,* 6*e en* 10*e is gelijk aan de* 7*e en* 8*e; ook is de ſom der* 1*e,* 2*e,* 3*e en* 8*e letter gelijk aan die der zes overigen; de laatſte letter is een trigonaal, welks wortel of zijde de* 4*e is.*

De 2*e letter is het dubbeld der vijfde. De ſom van de beide*

eerſten is gelijk aan die der 5e en 9e; de ſom der 2e, 4e en 6e is een pentagonaal, welks wortel de 5e letter is. Vermenigvuldigt men de 9e met 4 en voegt er de 7e bij, dan is deze ſom een hexagonaal, welks wortel de ſom der 3e en 4e letter is. Eindelijk is de helft der ſom van de 5e, 6e, 7e en 8e letter een zevenhoekig getal, welks zijde de derde is. Men vraagt naar den naam dier ſtad?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stellen wij, om tevens aan de eerſte bepaling van het voorſtel te voldoen, den naam der ſtad voor door de letters

$$m, n, p, p, u, v, w, x, y \text{ en } z,$$

dan heeft men, naar aanleiding des voorſtels, de volgende vergelijkingen

$$n+p=v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$u+v+z=w+x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$$m+n+p+x=p+u+v+w+y+z \quad \ldots \quad (3),$$

$$z=\frac{p(p+1)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

$$n=2u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

$$m+n=y+u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

$$2(n+p+v)=u(3u-1) \quad \ldots\ldots \quad (7),$$

$$4y+w=2p(4p-1) \quad \ldots\ldots \quad (8),$$

en

$$\frac{z+v+w+x}{2}=\frac{p(5p-3)}{2} \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

De vergelijkingen (2) en (6) bij elkander tellende en daarvan (3) aftrekkende, komt er

$$u=2w \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

En (1) van (7) aftrekkende, komt er

$$2v=\frac{u(3u-1)}{2},$$

of

$$v=\frac{u(3u-1)}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

De waarde van u in (5) en (11) ſtellende, zoo komt er

$$n=4w \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12),$$

en

$$v=\frac{w(6w-1)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Deze waarden in (1) ſtellende, zoo vindt men na herleiding

$$p=$$

$$p = \frac{8w(2w-3)}{2} \quad \ldots\ldots (14).$$

De vergelijking (4) van (2) aftrekkende, blijft er over na ontwikkeling

$$x = \frac{p(p+1)}{2} + u + v + w \quad \ldots\ldots (15).$$

De vergelijking (15) tweemaal genomen, afgetrokken van viermaal de vergelijking (9), dan blijft er over

$$4(u+v) = p(9p-7).$$

Hierin de waarden van p, u en v gesteld, komt er

$$12w^2 + 6w = \frac{324w^4 - 972w^3 + 645w^2 + 126w}{4},$$

of door w deelende en met 4 vermenigvuldigende, zoo heeft men

$$48w + 24 = 324w^3 - 972w^2 + 645w + 126,$$

of $$108w^3 - 324w^2 + 199w + 34 = 0.$$

De positieve wortel dezer vergelijking is

$$w = 2,$$

overeenkomende met de letter B. Deze waarde in (10), (12), (13) en (14) stellende, vindt men

$u = 4$ overeenkomende met E,

$n = 8$ » » I,

$y = \frac{2(12-1)}{2} = 11$ » » L,

$p = \frac{6(4-3)}{2} = 3$ » » D,

De waarden van p, u, v en w in (15) gesteld, geeft

$x = \frac{3(3+1)}{2} + 4 + 11 - 2 = 19$ overeenkomende met U.

De waarden van p en w in (8) gesteld, geven

$$4y = 2p(4p-1) - w = 6(12-1) - 2 = 64,$$

of $y = 16$ overeenkomende met R.

Eindelijk de waarden van n, u en y stellende in (6), alsmede die van p in (4), zoo komt er

$m = 16 + 4 - 8 = 12$ overeenkomende met M,

en $s = \frac{3(3+1)}{2} = 6$ overeenkomende met G.

De naam van de stad is dus MIDDELBURG.

LXXXI.

LXXXI. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt den inhoud van eenen driehoek te berekenen, wanneer gegeven zijn de drie loodlijnen uit de hoeken op de overſtaande zijden nedergelaten?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN., J. DOORMAN, J. N. CALTEN, C. F. JULIUS, J. BASSAN, J. JONKHERT *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Laat ABC (*Fig.* 33) de driehoek wezen, waarin de loodlijnen $AS=a$, $BT=b$ en $CR=c$ gegeven zijn, en ſtellen wij $AB=x$, $AC=y$ en $CB=z$, dan hebben wij, omdat de dubbele inhoud van den driehoek gelijk is aan het product van de loodlijn, met de zijde, waarop zij is nedergelaten, de vergelijkingen

$$AS\times CB=CR\times AB \quad \text{en} \quad AB\times CR=BT\times CA,$$

of $az=cy$ en $cy=bx$.

Verder is in den driehoek ABC

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-2CB\times CS,$$

of
$$y^2=x^2+z^2-2z\sqrt{(\overline{AC}^2-\overline{AS}^2)}$$
$$=x^2+z^2-2z\sqrt{(x^2-a^2)}.$$

In deze vergelijking voor x en z hunne waarden uit de beide eerſte vergelijkingen geſteld zijnde, komt er

$$y^2=\frac{c^2}{b^2}y^2+\frac{c^2}{a^2}y^2-2\frac{c}{a}y\sqrt{(\frac{c^2}{b^2}y^2-a^2)},$$

of met a^2b^2 vermenigvuldigende en door y deelende,

$$2cab\sqrt{(c^2y^2-a^2b^2)}=y(c^2a^2+c^2b^2-a^2b^2),$$

hetwelk tot de tweede magt verheven geeft

$$4c^2a^2b^2(c^2y^2-a^2b^2)=y^2(c^2a^2+c^2b^2-a^2b^2)^2,$$

of $y^2\{4c^2a^2b^2-(c^2a^2+c^2b^2-a^2b^2)^2\}=4a^4b^4c^2,$

$$y^2\{2cab-c^2a^2-c^2b^2+a^2b^2\}\{2cab+c^2a^2+c^2b^2-a^2b^2\}=4a^4b^4c^2,$$

hetwelk gemakkelijk herleid wordt tot

$$y^2\{a^2b^2-c^2(a-b)^2\}\{(a+b)^2c^2-a^2b^2\}=4a^4b^4c^2,$$

en dus tot

$$y^2\{ab-ca+cb\}\{ab+ac-cb\}\{ac+cb-ab\}$$
$$\{ac+cb+ab\}=4a^4b^4c^2.$$

Stelt

Stelt men nu $ab+bc+ac=2q^2$, dan wordt de voorgaande vergelijking

$$4y^2q^2(q^2-ab)(q^2-ac)(q^2-bc)=a^2b^2c^2.$$

Omdat nu eindelijk de inhoud I van den driehoek gelijk aan $\frac{1}{2}cy$ is, zoo volgt uit de laatste vergelijking

$$I=\frac{a^2b^2c^2}{4\sqrt{\{q^2(q^2-ab)(q^2-ac)(q^2-bc)\}}}.$$

LXXXII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt x en y zoodanig te bepalen, dat de uitdrukking $x^2+ax+bxy+cy^2+dy+e$ een rationaal vierkant worde?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN., J. N. CALTEN, J. BASSAN, J. JONKHERT *en* C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* J. N. CALTEN.

Men ftelle in de opgegevene uitdrukking

$$x^2+ax+bxy+cy^2+dy+e$$

$x=py$, alsdan wordt zij

$$(p^2+bp+c)y^2+(ap+d)y+e \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Men ftelle nu

$$bp+c=0,$$

of

$$p=-\frac{c}{b},$$

en dus

$$y=-\frac{c}{b}x,$$

dan verandert (1) in

$$p^2y^2+(ap+d)y+e,$$

of in

$$\frac{c^2}{b^2}y^2+(d-a\frac{c}{b})y+e.$$

Neemt men nu nog

$$(d-a\frac{c}{b})y+e=0,$$

of

$$y=\frac{be}{ac-bd},$$

dan verandert de voorgeftelde uitdrukking in

$$\frac{c^2}{b^2}y^2=\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{be}{ac-bd}\right)^2,$$

en er is alzoo aan het gevraagde voldaan.

LXXXIII.

LXXXIII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Wanneer men de breuk $\frac{a}{1-a}$ *ontwikkelt, zoo vindt men de reeks* $a+a^2+a^3+$ *enz. welke door* $a=2$ *oneindig wordt, terwijl het gebroken* $\frac{a}{1-a}$ *altoos* $=2$ *is; men vraagt de verklaring dezer schijnbare tegenstrijdigheid?*

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN., J. DOORMAN, J. JONKHEER *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Offchoon de vergelijking

$$\frac{a}{1-a}=a+a^2+a^3+\text{ enz.}$$

voor alle waarden van a doorgaat, zoo mag men bij het gebruik derzelve zich nooit tot een gedeelte of tot eenige termen dezer reeks bepalen, ten zij men kunne aanwijzen, dat de volgende termen der reeks tegen de voorgaande kunnen verwaarloosd worden.

Indien men nu in de voorgeftelde vergelijking $a=2$ ftelt, dan vindt men

$$-2=2+4+8+\text{ enz.},$$

doch men weet niet, of de waarde der volgende termen eindelijk eene negatieve uitkomst zullen opleveren; maar indien men zich bij het ontwikkelen der reeks bij een bepaald getal termen ophoudt, dan zal men vinden

$$\frac{a}{1-a}=a+a^2+a^3\ldots a^{n-1}+\frac{a^n}{1-a},$$

en daar dit nu de volkomen juiste waarde van het gebroken zal voorftellen, bij welke waarde van n men ook ophoudt, zoo moet deze vergelijking de verklaring van het gevraagde geven. Stelt men dan daarin $a=2$, zoo komt er ook werkelijk voor $n=2$

$$-2=2-4,$$

voor $n=3$ $\quad -2=2+4-8,$

voor $n=4$ $\quad -2=2+4+8-16.$

waardoor dan alle zwarigheid ophoudt. Men kan ook de voorgeftelde reeks aldus fchrijven

$$\frac{a}{}$$

$$\frac{a}{1-a} = a + a^2 + a^3 + \ldots a^{n-1} + \frac{a^n}{1-a}$$
$$= a\frac{1-a^{n-1}}{1-a} + \frac{a^n}{1-a}$$
$$= \frac{a}{1-a},$$

en men ziet derhalve, dat alleen door het weglaten van de rest der deeling men in tegenstrijdigheden vervalt. In sommige gevallen kan men echter werkelijk deze rest zonder zwarigheid verwaarloozen, namelijk wanneer dezelve zeer klein is. Bij voorbeeld, voor $a = \frac{1}{100}$ wordt de reeks, zoo men bij den derden term ophoudt,

$$\frac{1}{99} = \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} = 0{,}010101,$$

welke uitkomst tot in het laatste cijfer naauwkeurig is, terwijl het verwaarloosde gedeelte is $\frac{1}{99000000}$, eene zeer kleine breuk.

LXXXIV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt den inhoud te vinden van het ligchaam geboren door de omwenteling der conchoïde van Nicomedes om derzelver as?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN., J. N. CALTEN, J. JONKHERT *en* J. DOORMAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Wanneer men op de regthoekige asfen XX′ en YY′ (*Fig.* 34) de abcisfen en ordinaten telt, dan is de vergelijking der conchoïde

$$y = \pm\frac{a+x}{x}\sqrt{(b^2 - x^2)} \quad \ldots\ldots (1),$$

zijnde voor eenig punt A, AF $= y$ en OF $= x$, en de conchoïde zal de gedaante hebben in de figuur aangewezen; zoodat BO $=$ OB′ $= b$ en OP′ $= a$ is. De tak DBH wordt verkregen door aan x alle mogelijke positieve waarden te geven, en de tak D′B′H′ door al de mogelijke negatieve waarden van x. Bepalen wij ons vooreerst tot den tak DBH.

Voor

Voor de omwenteling van denzelven om YY′ hebben wij de algemeene formule

$$I = \pi \int y^2 \partial x$$

toe te paſſen, en hierin dus voor y zijne waarde uit (1) ſtellende, komt er

$$I = \pi \int \frac{(a+x)^2}{x^2} (b^2 - x^2) \partial x,$$

$$= \pi \int (\frac{a}{x} + 1)^2 (b^2 - x^2) \partial x,$$

$$= \pi \int \{\frac{a^2}{x^2} b^2 + \frac{2ab^2}{x} + b^2 - a^2 - 2ax - x^2\} \partial x,$$

$$= \pi \{-\frac{a^2 b^2}{x} + 2ab^2 Log.x + (b^2 - a^2)x - ax^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + C\} \quad (2).$$

Voor $x = OB = b$ kan men den inhoud $I = o$ ſtellen, en hierdoor wordt dan

$$o = \pi \{-a^2 b + 2ab^2 Log.b + (b^2 - a^2)b - ab^2 - \tfrac{1}{3}b^3 + C\},$$

of $$C = 2a^2 b + ab^2 - \tfrac{2}{3}b^3 - 2ab^2 Log.b,$$

en derhalve

$$I = \pi \{a^2 b^2 (\frac{1}{b} - \frac{1}{x}) + (b^2 - a^2)(x - b) - a(x^2 - b^2)$$

$$- \tfrac{1}{3}(x^3 - b^3) + 2ab^2 Log.\frac{x}{b}\} \quad \ldots \quad (3),$$

voor den inhoud voortgebragt door de omwenteling van eenigen boog AB om de as YY′. Zoo men den inhoud begeerde door eenigen boog AC beſchreven, alwaar FC = AF was, dan moet de bovenſtaande formule verdubbeld worden.

Indien men nu den inhoud wil vinden door de omwenteling van den tak D′B′H′ voortgebragt, dan heeft men in de vergelijking (2) x ſlechts negatief te ſtellen; en men heeft

$$I' = \pi \{\frac{a^2 b^2}{x'} + 2ab^2 Log.(-x')(b^2 - a^2)x' - ax'^2 + \tfrac{1}{3}x'^3 + C\} \quad (4).$$

In de figuur 34 is $a < b$ onderſteld en de tak D′B′H′ heeft alzoo eenen knoop P′EB′E′; was $a > b$, dan zou deze tak meer overeenkomst met die der poſitieve x hebben, en in den vorm A′Q′C′ voortgaan; terwijl voor $a = b$ er in P′ een keerpunt ontſtaat. In het eerſte geval voor $a > b$ kan men vooreerst vragen naar den inhoud van het ligchaam door den boog P′A′D′ voort-

voortgebragt, en alsdan moet in (4) de ſtandvastige bepaald worden door de voorwaarde van $I' = o$ voor $x' = +a$, waardoor deze vergelijking overgaat in

$$I' = \pi \left\{ a^2 b^2 \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{a}\right) - (b^2 - a^2)(x' - a) - a(x'^2 - a^2) + \tfrac{1}{3}(x'^3 - a^3) + 2ab^2 Log. \frac{x'}{a} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wilde men den inhoud weten door de omwenteling van den tak $B'E'P'D'$ voortgebragt, dan zou men in (4) de ſtandvastige door de voorwaarde van $I' = o$ voor $x' = b$ moeten bepalen, en men zoude hebben

$$I' = \pi \left\{ a^2 b^2 \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{b}\right) - (b^2 - a^2)(x' - b) - a(x'^2 - b^2) + \tfrac{1}{3}(x'^3 - b^3) + 2ab^2 Log. \frac{x'}{b} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Deze formule geeft echter niet in alle gevallen onmiddelijk den gevraagden inhoud, want wanneer men dezelve, bij voorbeeld, eerst neemt van $x = OB' = b$ tot $x = I'E'$, dan geeft de formule (6) den inhoud, voortgebragt door de omwenteling van het vlak $OB'E'I'$ om YY', en neemt men nu verder den inhoud door den boog $E'P'$ voortgebragt, door in (4) de ſtandvastige naar behooren te bepalen, dan vindt men den inhoud door de omwenteling van het vlak $I'E'P'O$ voortgebragt, zoodat beide deze inhouden te zamen nu eigenlijk geven de ſom der inhouden door de omwenteling van het vlak $P'E'B'$, en tweemaal dat door $I'E'P'O$ voortgebragt. In dergelijke zwarigheden vervalt men altijd, zoodra voor eene bepaalde waarde van y meer dan eene waarde van x beſtaat. Wil men dus den inhoud vinden door de omwenteling van den halven knoop $P'E'B'$ voortgebragt, zoo heeft men, ſtellende $I'E' = t$, uit (4)

$$\textit{Inhoud}\ OB'E'I' = \pi \left\{ a^2 b^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{b}\right) - (b^2 - a^2)(t - b) - a(t^2 - b^2) + \tfrac{1}{3}(t^3 - b^3) + 2ab^2 Log. \frac{t}{b} \right\},$$

en den inhoud $OP'E'I'$

$$= \pi \left\{ a^2 b^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right) - (b^2 - a^2)(t - a) \right.$$

$$\left. - a(t^2 - a^2) + \tfrac{1}{3}(t^3 - a^3) + 2ab^2 \mathrm{Log.} \frac{t}{a} \right\}.$$

Deze beide vergelijkingen van elkander afgetrokken, geven voor den inhoud van het omwentelingsligchaam door $P'E'B'$ voortgebragt

$$\pi \left\{ a^2 b^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - (b^2 - a^2)(a - b) - a(a^2 - b^2) \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{3}(a^3 - b^3) + 2ab^2 \mathrm{Log.} \frac{a}{b} \right\},$$

$$= \pi \left\{ (b-a)(ab + b^2 - a^2) + a(b^2 - a^2) + \tfrac{1}{3}(a^3 - b^3) + 2ab^2 \mathrm{Log.} \frac{a}{b} \right\},$$

$$= \pi \left\{ (b-a)(b^2 + 2ab) - \tfrac{1}{3}(b-a)(a^2 + ab + b^2) + 2ab^2 \mathrm{Log.} \frac{a}{b} \right\},$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi \left\{ (b-a)(4b^2 + 5ab - 2a^2) + 12ab^2 \mathrm{Log.} \frac{a}{b} \right\}.$$

Voor $a = b$ wordt deze inhoud $= o$ zoo als ook zijn moet, dewijl alsdan de kroop verdwijnt.

Voor $a = o$ gaat de conchoïde over in eenen bol beschreven met den straal b, en onze vergelijking geeft dan voor den halven bol

$$\tfrac{4}{6}\pi b^3,$$

zoo als ook wezen moest.

LXXXV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Wanneer men de cisfoïde van Diocles om de rigtlijn laat wentelen, dan vraagt men naar den inhoud van het hierdoor gevormde ligchaam?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN., J. N. CALTEN *en* J. DOORMAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Zij ABZ (*Fig.* 35) de cisfoïde, AA' de middellijn van den makenden cirkel en AS de rigtlijn, en stellen wij verder $AA' = 2a$, $AF = x$ en $FC = y$, dan hebben wij voor de vergelijking der cisfoïde

$y^2 =$

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

De inhoud van het gevraagde ligchaam wordt dan gevonden door in de algemeene vergelijking

$$I = \pi \int x^2 \partial y$$

voor x of y zijne waarde te ſtellen. De vergelijking (1) alzoo differentierende, komt er

$$2y\partial y = \frac{3x^2(2a-x)+x^3}{(2a-x)^2}\partial x,$$

$$= \frac{(6a-2x)x^2}{(2a-x)^2}\partial x,$$

derhalve $$\partial y = \frac{(3a-x)x^2}{(2a-x)^2\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}} = \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{\sqrt{(2a-x)^3}}\partial x,$$

of ſtellende $2a-x=x'$

$$\partial y = -\frac{(a+x')\sqrt{(2a-x')}}{\sqrt{x'^3}}\partial x',$$

alzoo $$I = -\pi \int \frac{(a+x')\sqrt{(2a-x')^5}}{\sqrt{x'^3}}\partial x'.$$

Stellende nu $2a-x'=x'z^2$, dan is

$$x' = \frac{2a}{z^2+1};$$

en $$\partial x' = -\frac{4az\partial z}{(z^2+1)^2},$$

en wij hebben

$$I = \pi \int (a+\frac{2a}{z^2+1})\left(\frac{x'^5 z^{10}}{x'^3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{4az\partial z}{(z^2+1)^2},$$

$$= 4a\pi \int (a+\frac{2a}{z^2+1})\frac{x' z^6 \partial z}{(z^2+1)^2},$$

$$= 8a^2\pi \int (1+\frac{2}{z^2+1})\frac{z^6}{(z^2+1)^3}\partial z,$$

$$= 8\pi a^2 \left\{\int \frac{z^6\partial z}{(z^2+1)^3} + 2\frac{z^6\partial z}{(z^2+1)^4}\right\},$$

of wel

$$I = 8\pi a^2 \left\{\int (1-\frac{3z^4+3z^2+1}{(z^2+1)^3})\partial z + 2\int \frac{z^6\partial z}{(z^2+1)^4}\right\}.$$

Het gebroken

$$\frac{3z^4+3z^2+1}{(z^2+1)^3}$$

kan men nu in kleinere gebrokens ontbinden, door te ſtellen

$$\frac{3z^4+3z^2+1}{(z^2+1)^3}=\frac{A}{(z^2+1)^3}+\frac{B}{(z^2+1)^2}+\frac{C}{z^2+1}.$$

Alles onder denzelfden noemer brengende en alsdan in den teller de coëfficienten der gelijke magten van z ter wederzijde van het teeken $=$ aan elkander gelijk ſtellende, zoo vindt men de vergelijkingen: $A+B+C=1$, $B+2C=3$ en $C=3$, waaruit volgt $A=1$, $B=-3$, $C=3$, en het gebroken wordt

$$\frac{3z^4+3z^2+1}{(z^2+1)^3}=\frac{1}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{3}{z^2+1}.$$

Op dezelfde wijze het gebroken $\frac{z^6}{(z^2+1)^4}$ behandelende, door te ſtellen

$$\frac{z^6}{(z^2+1)^4}=\frac{A'}{(z^2+1)^4}+\frac{B'}{(z^2+1)^3}+\frac{C'}{(z^2+1)^2}+\frac{D'}{z^2+1},$$

zoo vindt men de vergelijkingen

$D'=1$, $3D'+C'=0$, $3D'+2C'+B'=0$ en $A'+B'+C'+D'=0$, waaruit volgt

$$A'=-1,\ B'=3,\ C'=-3 \text{ en } D'=1,$$

en wij vinden

$$\frac{z^6}{(z^2+1)^4}=-\frac{1}{(z^2+1)^4}+\frac{3}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}.$$

Deze beide ontwikkelingen in de formule voor I ſtellende, komt er

$$I=8\pi a^3\left\{\int\partial z-\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^3}+3\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^2}-3\int\frac{\partial z}{1+z^2}\right.$$
$$\left.-2\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^4}+6\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^3}-6\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^2}+2\int\frac{\partial z}{1+z^2}\right\},$$
$$=8\pi a^3\left\{z-2\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^4}+5\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^3}-3\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^2}-\int\frac{\partial z}{1+z^2}\right\}.$$

Maar nu is

$$\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^4}=\frac{z}{6(1+z^2)^3}+\frac{5}{6}\int\frac{\partial z}{(1+z^2)^3},$$

der-

derhalve

$$I=8\pi a^3\left\{z-\frac{z}{3(1+z^2)^3}+\tfrac{10}{3}\int\frac{\partial z}{(1+z^2)^3}-3\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^2}-\int\frac{\partial z}{1+z^2}\right\},$$

verder is

$$\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^3}=\frac{z}{4(1+z^2)^2}+\tfrac{3}{4}\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^2},$$

derhalve wederom

$$I=8\pi a^3\left\{z-\frac{z}{3(1+z^2)^3}+\frac{5z}{6(1+z^2)^2}-\tfrac{5}{6}\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^2}-\tfrac{5}{6}\int\frac{\partial z}{z^2+1}\right\};$$

nu is weder

$$\int\frac{\partial z}{(1+z^2)^2}=\frac{z}{2(z^2+1)}+\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial z}{z^2+1},$$

dus

$$I=8\pi a^3\left\{z-\frac{z}{3(1+z^2)^3}+\frac{5z}{6(1+z^2)^2}-\tfrac{5}{12}\frac{z}{z^2+1}-\tfrac{5}{12}\int\frac{\partial z}{z^2+1}\right\}$$

$$=8\pi a^3\left\{z-\frac{z}{3(1+z^2)^3}+\frac{5z}{6(1+z^2)^2}-\tfrac{5}{12}\frac{z}{z^2+1}-\tfrac{5}{12}\,BoogTang.z+C\right\}\ (2).$$

Maar

$$z^2=\frac{2a'-x'}{x'}$$

$$=\frac{x}{2a-x}$$

zijnde, zoo kan gemakkelijk in (2) de waarde van z in x worden uitgedrukt.

Indien men den inhoud van den oorsprong A af rekent, dan is voor $x=o$ ook $I=o$, en daar voor $x=o$ ook $z=o$ is, zoo is de ſtandvastige ook gelijk nul. Voor $x=a$ is $z=1$, en alsdan vinden wij voor den inhoud van het ligchaam, door de omwenteling van den boog AB voortgebragt:

$$I'=8\pi a^3\left\{1-\frac{1}{3.8}+\frac{5}{6.4}-\frac{1}{4.2}-\tfrac{5}{12}.\tfrac{1}{4}\pi\right\}$$

$$=0{,}4776\,\pi a^3.$$

LXXXVI. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Als men de gewone epicycloïde om den oorſprong der hoeken laat wentelen, dan vraagt men naar de oppervlakte van het hierdoor gevormde ligchaam?

OPGELOST *door* J. N. CALTEN, A. B. DE BOCK, JUN., J. JONKHERT *en* J. DOORMAN.

OPLOSSING *van* J. N. CALTEN.

Laat ABZ (*Fig.* 36) een boog van de epicycloïde zijn, AX de oorsprong der hoeken, zoodat XAB$=\phi$ en AB$=z$ zijnde, men heeft

$$z=2r(1-Cos.\phi),$$

zijnde r de straal van den makenden cirkel. De differentiaal van den boog is algemeen

$$\partial s=\partial\phi\sqrt{(\frac{\partial z^2}{\partial\phi^2}+z^2)},$$

en dus de differentiaal van het oppervlak des omwentelingsligchaams

$$2\pi\times\partial s\times PB=2\pi z\,Sin.\phi\,\partial\phi\sqrt{(\frac{\partial z^2}{\partial\phi^2}+z^2)}.$$

Maar nu is voor de epicycloïde

$$\partial z=2r\,Sin.\phi\,\partial\phi,$$

derhalve de differentiaal van het oppervlak O

$$\partial O=2\pi\partial\phi\,z\,Sin.\phi\sqrt{(4r^2Cos^2.\phi+z^2)},$$

of voor z zijne waarde stellende

$$\partial O=4\pi\partial\phi.Sin.\phi.r(1-Cos.\phi)\,2r\sqrt{(Sin^2.\phi+(1-Cos.\phi)^2)},$$
$$=8\pi r^2\partial\phi.Sin.\phi(1-Cos.\phi)\sqrt{(2-2Cos.\phi)},$$
$$=8\sqrt{2}.\pi r^2(1-Cos.\phi)^{\frac{3}{2}}\partial(1-Cos.\phi),$$

omdat

$$Sin.\phi\,\partial\phi=\partial(1-Cos.\phi)$$

is. Zoodat integrerende men vindt:

$$O=8\sqrt{2}\pi r^2\{\tfrac{2}{5}(1-Cos.\phi)^{\frac{5}{2}}+C\}.$$

Voor het punt A is $\phi=0$ alsmede O gelijk nul, derhalve behoeft er geene standvastige bijgevoegd te worden, en alzoo is

$$O=\tfrac{16}{5}\sqrt{2}.\pi r^2(1-Cos.\phi)^{\frac{5}{2}}.$$

Voor $\phi=180$ heeft men de geheele oppervlakte

$$O=\tfrac{128}{5}\pi r^2.$$

LXXXVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert twee getallen te vinden, zijnde het eene een vier-

kant

kant en het andere eene derde magt, zoodanig, dat zoowel de ſom der getallen als die van derzelver wortels kwadraten worden?

OPGELOST *door* J. BASSAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. JONKHERT *en* C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stelt men voor de beide getallen p^2x^2 en q^3x^3, dan moeten volgens het voorſtel $p^2x^2+q^3x^3$ en $px+qx$ vierkanten zijn. De laatſte waarde $(p+q)x$ zal een vierkant zijn door $x=p+q$ te nemen; en alsdan wordt

$$p^2x^2+q^3x^3=x^2(p^2+q^3x)x$$
$$=x^2\{p^2+q^3(p+q)\}.$$

En men behoeft ſlechts den tweeden factor van het tweede lid tot een vierkant te maken. Nu is

$$p^2+q^3(p+q)=q^4+pq^3+p^2;$$

door $q=2$ te nemen, wordt onmiddelijk aan deze voorwaarde voldaan, want alsdan is

$$q^4+pq^3+p^2=(4+p)^2.$$

Het eene getal wordt dus

$$p^2x^2=p^2(2+p)^2,$$

en het tweede $q^3x^3=8(2+p)^3$,

waarin nu p naar willekeur genomen mag worden.

Voor $p=1$ zijn dus de twee getallen 9 en 216, waarvan de ſom der wortels $3+6=9$ alsmede $9+216=225$ vierkanten zijn.

LXXXVIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt naar twee getallen, welke de eigenſchap hebben, dat derzelver product het $\frac{1}{5}$ van het vierkant hunner ſom en de ſom der cuben gedeeld door de ſom der getallen gelijk aan 16 zij?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. DOORMAN, J. BASSAN, C. F. JULIUS, G. BRANDSTEDER, C. VAN SCHAICK, J. JONKHERT *en* M. H. GODEFROI.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laten de twee getallen zijn x en y, dan geeft het voorſtel de twee vergelijkingen

$$xy=\frac{(x+y)^2}{5} \quad \text{en} \quad \frac{x^3-y^3}{x+y}=16,$$

waarvoor men ſchrijven kan

$$5xy = x^2 + 2xy + y^2 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

en

$$16 = x^2 - xy + y^2 \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Het verſchil dezer vergelijkingen geeft

$$5xy - 16 = 3xy,$$

of

$$2xy = 16,$$

en

$$xy = 8.$$

Hierdoor wordt de vergelijking (1)

$$40 = (x+y)^2,$$

of

$$x+y = \pm 2\sqrt{10}.$$

En trekt men van (1) ter wederzijde $4xy$ af, dan komt er

$$xy = x^2 - 2xy + y^2,$$

of

$$8 = (x-y)^2,$$

dus

$$x-y = \pm 2\sqrt{2},$$

hetwelk opgeteld en afgetrokken van

$$x+y = \pm 2\sqrt{10},$$

geeft

$$x = \pm\{\sqrt{10}+\sqrt{2}\},$$

en

$$y = \pm\{\sqrt{10}-\sqrt{2}\}.$$

LXXXIX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Vier getallen vormen eene evenredigheid, waarvan de rede gegeven is, de ſom der eerſte en laatſte termen is $= a$, *en die der middelſten* b, *welke zijn die getallen?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, C. F. JULIUS, J. DOORMAN, C. VAN SCHAICK, J. JONKHERT *en* M. H. GODEFROI.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laten de vier getallen zijn

$$x,\ nx,\ y \text{ en } ny,$$

dan is aan de eerſte voorwaarde voldaan, want

$$x : ny = y : ny.$$

Verder hebben wij, ingevolge het voorſtel, de vergelijkingen

$$x + ny = a,$$

en

$$nx + y = b.$$

Trekt men nu van n maal de eerſte vergelijking de tweede af, dan komt er

n^2y

$$n^4y - y = na - b,$$

of $$y = \frac{na - b}{n^2 - 1}.$$

En op dezelfde wijze van n maal de tweede vergelijking de eerste aftrekkende, komt er

$$n^2x - x = nb - a,$$

of $$x = \frac{nb - a}{n^2 - 1},$$

in welke vergelijkingen nu n naar willekeur mag genomen worden.

XC. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Vier getallen vormen eene evenredigheid, waarvan de rede gegeven is, de som der drie eerste termen is $= a$ *en der drie laatste* $= b$; *welke zijn die getallen?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, C. F. JULIUS, M. H. GODEFROI, J. DOORMAN, J. JONKHERT *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laten wederom de vier getallen voorgesteld worden door

$$x,\ nx,\ y \text{ en } ny,$$

dan is aan de eerste voorwaarde voldaan; het voorstel geeft nu nog

$$x + nx + y = a,$$

en $$nx + y + ny = b,$$

of $$(1 + n)x + y = a,$$

en $$nx + (1 + n)y = b.$$

De eerste dezer vergelijkingen met n en de tweede met $n + 1$ vermenigvuldigd en dan van elkander afgetrokken geeft

$$ny - (1 + n)^2y = na - (n + 1)b,$$

en dus $$y = \frac{na - (n + 1)b}{n - (1 + n^2)}.$$

Vermenigvuldigt men daarentegen de eerste vergelijking met $1 + n$ en trekt dezelve van de tweede af, zoo komt er

$$(1 + n)^2x - nx = (1 + n)a - b,$$

of $$x = \frac{(1 + n)a - b}{(1 + n)^2 - n}.$$

Waaruit ook wederom volgt, dat n naar willekeur mag aangenomen worden.

XCI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Drie getallen te vinden, zoodanig, dat de derde magt des eerſten met de tweede magt des middelſten gelijk zij aan het driehoekig getal, welks wortel het derde is?

OPGELOST *door* J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, C. F. JULIUS, J. JONKHERT *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten de drie getallen zijn x, px en qx, dan moet volgens het voorſtel

$$x^3+p^2q^2=\tfrac{1}{2}(q^2x^2+qx).$$

Nu ſtellen wij $x^3=\frac{1}{2}q^2x^2$ en $p^2x^2=\frac{1}{2}qx$, alsdan heeft men

$$x=\tfrac{1}{2}q^2 \quad \text{en} \quad x=\tfrac{1}{2}\frac{q}{p^2},$$

en dus $$q^2=\frac{q}{p^2},$$

of $$p^2=\frac{1}{q},$$

zoodat de getallen worden

$$x=\tfrac{1}{2}q^2=\frac{1}{2p^4},$$

$$px=p\cdot\frac{1}{2p^4}=\frac{1}{2p^3},$$

en $$qx=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{2p^4}=\frac{1}{2p^6}.$$

Stellende dus ten voorbeeld $\frac{1}{p}=2$, dan zijn de getallen

8, 4 en 32.

XCII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar drie getallen, de eigenſchap hebbende, dat de ſom der twee eerſten een vierkant, der twee laatſten eene derde magt, en eindelijk die van het eerſte en derde eene vierde magt zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, C. F. JULIUS, C. VAN SCHAICK *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Op-

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stellen wij de gevraagde getallen voor door

$$x^4 - z, \quad y^3 - z \quad \text{en} \quad z,$$

dan voldoen deze waarden aan de twee laatſte voorwaarden van het voorſtel; de eerſte geeft dan nog, dat

$$x^4 + y^3 - 2z$$

een vierkant moet zijn; en hieraan wordt onder anderen voldaan door te ſtellen

$$y^3 - 2z = 2x^2 + 1,$$

want alsdan is $x^4 + y^3 - 2z = (x^2 + 1)^2$.

Uit de aangenomene onderſtelling volgt dan

$$z = \frac{y^3 - 2x^2 - 1}{2},$$

waarin nu voor y en x willekeurige getallen genomen kunnen worden. Wil men echter alles in geheele getallen vinden, dan moet voor y altijd een oneven getal gekozen worden. Het is overigens duidelijk, dat de drie getallen nu voorgeſteld zijn door

$$x^4 - \frac{y^3 - 2x^2 - 1}{2},$$

$$y^3 - \frac{y^3 - 2x^2 - 1}{2} = \frac{y^3 + 2x^2 + 1}{2}$$

en door

$$\frac{y^3 - 2x^2 - 1}{2}.$$

XCIII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Drie getallen vormen eene rekenkunstige reeks, waarvan de ſom van de vierkanten der termen $= 381$, *en het produkt der termen* $= 1232$ *is; men vraagt naar deze reeks?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. BASSAN, C. F. JULIUS, M. H. GODEFROI, J. JONKHERT *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Laat de reeks zijn

$$x - y, \quad x \quad \text{en} \quad x + y,$$

dan geeft het voorſtel de twee vergelijkingen

$$381 = (x - y)^2 + x^2 + (x + y)^2,$$

en

$$1232 = (x - y)(x + y)x,$$

of

of $381 = 3x^2 + y^2 x,$

en $1232 = x - y^2 x.$

In de tweede vergelijking voor y^2 zijne waarde uit de eerste gesteld geeft

$$x^3 - x\,\frac{381 - 3x^2}{2} = 1232$$

of $5x^3 - 381x - 2464 = 0.$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door $x = 11$, en het quotient van

$$\frac{5x^3 - 381x - 2464}{x - 11} = 5x^2 + 55x + 244$$

zijnde, geeft onbestaanbare waarden voor de beide overige wortels der vergelijking, zoodat $x = 11$ alleen bruikbaar zijnde, men voor y vindt

$$y^2 = \frac{381 - 3x^2}{2} = 9,$$

of $y = \pm 3,$

zoodat de beide reeksen zijn 8, 11 en 14 of 14, 11 en 8.

XCIV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt naar twee getallen, waarvan de som, derzelver product en de som hunner cuben even groot zijn?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, C. F. JULIUS, J. N. CALTEN, J. DOORMAN, J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Indien de begeerde getallen zijn x en y, dan geeft het voorstel de vergelijkingen

$$x + y = xy \quad \text{en} \quad x^3 + y^3 = xy.$$

De eerste vergelijking in de tweede deelende, komt er

$$x^2 - xy + y^2 = 1,$$

en hiervan het vierkant der eerste vergelijking afgetrokken, komt er

$$-3xy = 1 - x^2 y^2,$$

of $x^2 y^2 - 3xy = 1,$

waaruit volgt

$$xy = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(1 + \tfrac{9}{4})} = \tfrac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13}).$$

Deze waarde in de eerste vergelijking gesteld, geeft

$x + y$

$$x+y=\tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{13}).$$

De tweede magt der eerſte vergelijking, zijnde

$$x^2+2xy+y^2=x^2y^2,$$

verminderd met

$$4xy=2(3\pm\sqrt{13}),$$

geeft $(x-y)^2=x^2y^2-2(3\pm\sqrt{13})$,

$$=\tfrac{1}{4}(22\pm6\sqrt{13})-2(3\pm\sqrt{13}),$$

$$=-\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{13}=\tfrac{1}{2}(-1\mp3\sqrt{13}),$$

dus $x-y=\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(-1\mp\sqrt{13})\}}$,

hier bij geteld en afgetrokken

$$x+y=\tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{13}),$$

geeft $x=\tfrac{1}{4}(3\pm\sqrt{13})+\tfrac{1}{2}\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(1\mp\sqrt{13})\}}$,

en $y=\tfrac{1}{4}(3\pm\sqrt{13})-\tfrac{1}{2}\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(1\mp\sqrt{13})\}}$.

XCV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

In een tuighuis ſtaan drie kogelſtapels, de kleinſte en grootſte zijn driehoekige en de middelſte een vierhoekige piramidale ſtapel, bevattende te zamen 1550 *kogels. De ſom van tweemaal den wortel van den grootſten ſtapel plus viermaal die van den kleinſten is gelijk aan vijfmaal dien van den vierhoekigen; en het verſchil tuſſchen de wortels van den kleinſten driehoekigen met die van den vierhoekigen is één meer dan het verſchil der laatſten met die der grootſte driehoekige ſtapels; men vraagt naar het getal kogels in elken ſtapel?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, C. F. JULIUS, J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stellen wij de wortel van den kleinſten driehoekigen ſtapel $=x$, die van den vierhoekigen y en van den grootſten driehoekigen ſtapel $=z$, dan hebben wij volgens de beide voorwaarden van het voorſtel

$$2z+4x=5y \text{ en } y-x=z-y+1,$$

of $2z+4x-5y=0$ en $2y-x-z-1=0$,

de eerſte met 2 en de tweede met 5 vermenigvuldigd en dan opgeteld, geeft

$$-z+3x-5=0,$$

of $$z=3x-5.$$

Het

Hetwelk in de eerſte vergelijking geſteld, geeft

$$5y = 4x + 6x - 10,$$

of $$y = 2x - 2.$$

Uit dit alles volgt dan voor het getal kogels in den kleinen driehoekigen ſtapel

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{6},$$

in den vierhoekigen

$$\frac{(2x-2)(2x-1)(4x-3)}{6},$$

en in den grootſten driehoekigen

$$\frac{(3x-5)(3x-4)(3x-3)}{6},$$

waarvan de ſom is

$$\tfrac{1}{6}\{x(x+1)(x+2) + 2(x-1)(2x-1)(4x-3) + 3(3x-5)(3x-4)(x-1)\} = 1550,$$

of $$x(x+1)(x+2) + (x-1)\{2(2x-1)(4x-3) + 3(3x-5)(3x-4)\} = 9300,$$

en dit alles ontwikkelende en rangſchikkende

$$44x^3 - 141x^2 + 169x - 66 = 9300,$$

of $$44x^3 - 141x^2 + 169x - 9366 = 0.$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door $x = 7$, terwijl de beide andere wortels

$$x = -\frac{167}{88} \pm \sqrt{\left(\frac{167}{88}\right)^2 - \frac{1338}{88}}$$

onbeſtaanbaar zijn. Voor $x = 7$ wordt nu $y = 12$ en $z = 16$, en alzoo bevat de eerſte kogelſtapel 84, de tweede 650 en de derde 816 kogels.

XCVI. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt naar drie getallen, waarvan de ſom van vijfmaal het kleinſte plus het dubbel van het grootſte gelijk zij aan zeven maal het middelſte getal; verder is de trigonaal van het grootſte plus 2 gelijk aan de pentagonaal van het kleinſte en driemaal het middelſte getal; eindelijk is het product van het grootſte en kleinſte ge-

gelijk aan de ſom van dit kleinſte en 4 vermenigvuldigd met het middelſte getal. Welke zijn die getallen?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. BASSAN *en* C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

De drie gevraagde getallen door x, y en z voorſtellende, geeft ons het vraagſtuk de vergelijkingen

$$5x+2z=77,\quad \frac{x^2+z}{2}+2=\frac{3x^2-x}{2}+3y$$

en

$$xz=y(x+4).$$

De eerſte met 6, de tweede met 14 en de derde met 3 vermenigvuldigende, komt er

$$30x+12z-42y=0 \quad\ldots\ldots (1),$$

$$7z^2+7z-21x^2+7x-42y+28=0 \quad\ldots (2),$$

en

$$7xz-7y(x+4)=0 \quad\ldots\ldots (3).$$

De vergelijking (1) van (2) afgetrokken, geeft

$$7z^2-5z-21x^2-23x+28=0 \quad\ldots (4).$$

Uit (1) de waarde van y in (3) geſteld, geeft

$$7xz-5x^2-2xz-20x-8z=0,$$

of

$$(5x-8)z=5x(x+4),$$

dat is

$$z=\frac{5x(x+4)}{5x-8} \quad\ldots\ldots (5).$$

Deze waarde in (4) geſteld, geeft

$$\frac{175x^2(x+4)^2}{(5x-8)^2}-\frac{25x(x+4)}{5x-8}-21x^2-23x+28=0,$$

waaruit na behoorlijke herleiding en ontwikkeling volgt

$$350x^4-2380x^3-3696x^2+2912x-1792=0,$$

of alle de termen door 14 deelende,

$$25x^4-170x^3-264x^2+208x-128=0,$$

waaraan door $x=8$ voldaan wordt. Door deze waarde komt uit (8)

$$z=\frac{5.8.12}{58-8}=15,$$

en alzoo uit (1)

$$y=10,$$

waardoor het vraagſtuk is opgelost.

XCVII.

XCVII. VOORSTEL.

Door B. G. VAN KELL.

Men vraagt een getal in twee deelen te deelen, zoodanig, dat de trigonaal van het grootſte gelijk zij aan de pronik van het kleinſte deel?

OPGELOST *door* B. G. VAN KELL, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, G. BRANDSTEDER, C. F. JULIUS, J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* B. G. VAN KELL.

Zij het getal $= a$, en het eene deel x, zoodat het andere wordt $a - x$, dan moet volgens dit vraagſtuk

$$\frac{x^2 + x}{2} = (a - x)^2 + a - x,$$

of $$x^2 + x = 2x^2 - 4xa + 2a^2 + 2a - 2x,$$

of wel $$x^2 - 4xa - 3x = -2a - 2a^2,$$

dat is $$x^2 - 2x(2a + \tfrac{3}{2}) = -2a(1 + a),$$

en dus $$x = 2a + \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\{-2a(1+a) + (2a + \tfrac{3}{2})^2\}},$$

$$= 2a + \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\{-2a - 2a^2 + 4a^2 + 6a + \tfrac{9}{4}\}},$$

$$= 2a + \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(2a^2 + 4a + \tfrac{9}{4})}.$$

XCVIII. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Welke wet moet de middelpunts- of aantrekkingskracht volgen, om een ligchaam eene gewone epicycloïde te doen doorloopen, welke het middelpunt der krachten tot pool heeft; welke ſnelheid zal het ligchaam in eenig punt van deze baan hebben en binnen welken tijd zal een gegeven boog doorloopen worden, de ruimte gegeven zijnde door den voerſtraal in eenen bekenden tijd doorloopen?

OPGELOST *door* R. LOBATTO, J. JONKHERT *en* J. DOORMAN.

OPLOSSING *van* R. LOBATTO.

Noemende z en ϕ de polaire coördinaten van de punten eener kromme lijn door de beweging van een ligchaam beſchreven, ten gevolge eener in de pool werkende aantrekkingskracht, dan zal het vermogen K dezer kracht uitgedrukt kunnen worden door de formule

K =

$$K = \frac{C^2}{z^5}\left\{z^2 + 2\frac{\partial z^2}{\partial \varphi^2} - z\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right\} \quad \ldots\ldots (\alpha).$$

(Zie R. LORATTO, *Wiskundige Mengelingen*, bl. 141 en I. R. SCHMIDT, *Dynamica*, §. 285 en 286).

In deze formule is dan C de dubbele ruimte door de voerstraal in de eenheid van tijd doorgeloopen. Wij hebben dan slechts de formule voor de epicycloïde hierop toe te passen.

Nu is $z = 2r(1 - Cos.\varphi)$,

dus $\partial z = 2r\, Sin.\varphi\, \partial\varphi$,

en $\partial^2 z = 2r\, Cos.\varphi\, \partial\varphi^2$.

Hierdoor wordt $2\frac{\partial z^2}{\partial \varphi^2} = 8r^2 Sin^2.\varphi$,

en $z\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = 2zr\, Cos.\varphi$,

waardoor (α) verandert in

$$K = \frac{C^2}{z^5}\left\{z^2 + 8r^2 Sin^2.\varphi - 2zr\, Cos.\varphi\right\},$$

$$= \frac{C^2}{z^5}\left\{4r^2(1 - Cos.\varphi)^2 + 8r^2 Sin^2.\varphi - 2zr\, Cos.\varphi\right\},$$

$$= \frac{C^2}{z^5}\left\{4r^2(2 + Sin^2.\varphi - 2\, Cos.\varphi) - 2zr\, Cos.\varphi\right\},$$

$$= \frac{C^2}{z^5}\left\{4rz + 4r^2 Sin^2.\varphi - 2zr\, Cos.\varphi\right\},$$

$$= \frac{C^2}{z^5}\left\{4rz + 4r^2 Sin^2.\varphi - 2rz\frac{2r - z}{2r}\right\},$$

$$= \frac{C^2}{z^5}\left\{4rz + 4r^2(1 - Cos^2.\varphi) - z(2r - z)\right\},$$

$$= \frac{C^2}{z^5}\left\{2rz + z^2 + 4r^2\left(1 - \left(\frac{2r - z}{2r}\right)^2\right)\right\},$$

$$= \frac{C^2}{z^5}\left\{2rz + z^2 + 4r^2 - (2r - z)^2\right\},$$

$$= \frac{6r\, C^2}{z^4}.$$

Derhalve zal de aantrekkende kracht in de omgekeerde rede van de vierde magten der afstanden moeten werken, om de epicycloïde aan het ligchaam te doen beschrijven.

De snelheid in eenig punt wordt gevonden door de formule

$$S = \frac{C\partial s}{z^2 \partial \varphi},$$

en daar hier

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} = V\left(\frac{\partial z^2}{\partial \varphi^2} + z^2\right),$$
$$= V\left\{4r^2 Sin^2.\varphi + 4r^2(1 - Cos.\varphi)^2\right\},$$
$$= 2rV\left\{2 - 2Cos.\varphi\right\},$$
$$= 2V r V z = 2V r z,$$

zoo is $$S = 2CV\frac{r}{z^3}.$$

De snelheid in elk punt is dus omgekeerd evenredig aan den vierkantwortel uit de derde magt van den afstand tot de pool.

De betrekking tusschen den tijd en de doorgeloopene ruimte kan gevonden worden uit de formule voor den tijd t

$$t = \frac{1}{C}\int z^2 \partial \varphi,$$

welke hier wordt

$$t = \frac{4a^2}{C}\int (1 - Cos.\varphi)^2 \partial \varphi,$$
$$= \frac{4a^2}{C}\left\{\varphi - (\tfrac{1}{2} Sin.\varphi Cos.\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi)\right\},$$
$$= \frac{2a^2}{C}\left\{\varphi - Sin.\varphi Cos.\varphi\right\} \quad \ldots\ldots (\beta),$$

waarbij geene standvastige behoeft, omdat φ en t te gelijk nul worden. Nu is verder de boog de epicycloïde

$$s = 2r\int V(2 - 2Cos.\varphi)\partial\varphi,$$
$$= 4r Sin.\tfrac{1}{2}\varphi\partial\varphi,$$
$$= 8r Cos.\tfrac{1}{2}\varphi + C,$$

of omdat φ en s te gelijk nul zijn,

$$s = 8r(1 - Cos.\tfrac{1}{2}\varphi) \quad \ldots\ldots (\gamma).$$

Tusschen de vergelijkingen (β) en (γ) zoude nu φ moeten verdreven worden, hetgeen niet anders dan door benadering is te doen. Voor $\varphi = 180°$ vindt men echter gemakkelijk

$$t = \frac{2a^2\pi}{C},$$

en $$s = 8r.$$

XCIX. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Welke wet moet de middelpunts- of aantrekkingskracht volgen, om een ligchaam eene logarithmiſche ſpiraal te doen doorloopen, welke het middelpunt der krachten tot pool heeft; en welke ſnelheid zal het ligchaam in eenig punt van de baan hebben, zoo gegeven is, de ruimte door den voerſtraal in eenen gegevenen tijd doorloopen?

OPGELOST door J. JONKHERT en J. DOORMAN.

OPLOSSING van J. JONKHERT.

Wij hebben hier weder dezelfde formule

$$K=\frac{C^2}{z^5}\left\{z^2+2\frac{\partial z^2}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right\}$$

van het voorgaande voorſtel toe te paſſen op de formule

$$z=a^{\varphi}.$$

Uit deze laatſte volgt

$$\partial z=a^{\varphi}\partial\varphi\, Log.\, a=z\partial\varphi\, Log.\, a,$$

en $$\partial^2 z=a^{\varphi}\partial\varphi^2\, Log^2.a=z\partial\varphi^2\, Log^2.a.$$

Wij hebben dus onmiddellijk

$$K=\frac{C^2}{z^5}\left\{z^2+2z^2\, Log^2.a-z^2\, Log^2.a\right\}$$

$$=\frac{C^2}{z^3}\left(1+Log^2.a\right).$$

Hetgeen dus leert, dat de aantrekkingskracht in de omgekeerde rede van de derde magt der afſtanden moet werken.

Voor de ſnelheid hebben wij wederom

$$S=\frac{C\partial s}{z^2\partial\varphi}.$$

Maar nu is hier

$$\partial s=\partial\varphi\sqrt{\left(\frac{\partial z^2}{\partial\varphi^2}+z^2\right)},$$

$$=\partial\varphi\sqrt{\left\{z^2\, Log^2.a+z^2\right\}}=z\partial\varphi\sqrt{\left(1+Log^2.a\right)},$$

dus $$S=\frac{C}{z}\sqrt{\left(1+Log^2.a\right)}.$$

De ſnelheid in elk punt is dus in omgekeerde rede der afſtanden. De tijd t wordt gevonden door de formule

$$s = \frac{1}{C}\int z^2 \partial\varphi,$$

$$= \frac{1}{C}\int a^{2\varphi}\partial\varphi,$$

$$= \frac{a^{2\varphi}}{2C\,Log.\,a} + D,$$

$$= \frac{z^2}{2C\,Log.\,a} + D.$$

Laat men s en φ te gelijk beginnen, dan is $D = -\frac{1}{2C\,Log.\,a}$, en dus

$$s = \frac{1}{2C\,Log.\,a}(z^2 - 1).$$

Verder is de boog

$$s = \sqrt{(1 + Log^2.\,a)}\int z\partial\varphi,$$

$$= \sqrt{(1 + Log^2.\,a)}\frac{z^\varphi}{Log.\,a} + E,$$

$$= \frac{z}{Log.\,a}\sqrt{(1 + Log^2.\,a)} + E.$$

Neemt men $s = o$ voor $\varphi = o$ of voor $z = 1$, dan is $E = -\frac{\sqrt{(1 + Log^2.\,a)}}{Log.\,a}$, en dus

$$s = \frac{\sqrt{(1 + Log^2.\,a)}}{Log.\,a}(z - 1),$$

en hieruit de waarde van z in die voor s ſtellende, komt er

$$s = \frac{1}{2C\,Log.\,a}\left\{\frac{(s\,Log.\,a + 1)^2}{1 + Log^2.\,a} - 1\right\}.$$

AANMERKING. In de *Wiskundige Mengelingen* van den Heer LOBATTO vindt men nog meer beſpiegelingen omtrent dit onderwerp, en aldaar wordt aangewezen, dat eene aantrekkingskracht werkende in de omgekeerde rede der derde magten van de afſtanden, in ſtaat is het aangetrokken ligchaam vier onderſcheidene kromme lijnen te doen beſchrijven, alles naar gelang van de aanvankelijke ſnelheid, waarmede het ligchaam bij den aanvang der beweging voortgaat en van deszelfs ſtand met betrekking tot de pool.

C.

C. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men vraagt naar de zijden van eenen driehoek, zoo de som der zijden 220, de middellijn van den omgeschreven' cirkel = 85, en van den ingeschreven' cirkel = 42 zij? (*)

OPGELOST door K. SMIT, J. BASSAN, J. JONKHERT en C. F. JULIUS.

OPLOSSING van K. SMIT.

Stellen wij de zijden van den driehoek x, y en z, de halve som der zijden $= a$, den straal van den ingeschreven' cirkel $= r$, en die van den omgeschrevenen $= r'$, dan hebben wij volgens het voorstel

$$x+y+z=2a=220,$$
$$r=21,$$
en
$$r'=42\tfrac{1}{2}.$$

De inhoud van den driehoek is nu

$$\tfrac{1}{2}r.2a=ra=\tfrac{1}{2}(x+y+z)r.$$

Verder is
$$rr'=\frac{xyz}{2(x+y+z)}=\frac{xyz}{4a}.$$

(Zie I. R. SCHMIDT, *Trigonometrie*, §. 46).

Verder is ook de inhoud des driehoeks

$$a(a-x)(a-y)(a-z)=r^2a^2,$$
of
$$(a-x)(a-y)(a-z)=r^2a,$$
en
$$a^3-(x+y+z)a^2+a(yx+yz+zx)-zyx=r^2a,$$
of
$$a^3-2a.a^2+a(yx+yz+zx)-4rr'a=r^2a,$$
dat is
$$yx+yz+zx=r^2+4rr'+a^2.$$

Deze vergelijking geeft de waarde van alle de producten twee aan twee der zijden, en bovendien hebben wij voor het product der drie zijden $xyz=4arr'$, en voor hare som $2a$; de vergelijking derhalve, welke de drie zijden tot wortels heeft, moet dus zijn

$$w^3-2aw^2+(r^2+4rr'+a^2)w-4arr'=0.$$

En hierin de getallenwaarden voor a, r en r' gesteld, komt er

$$w^3-220w^2+116111w-392700=0,$$

waarvan door de gewone regels gevonden wordt voor de wortels

75

(*) P. HALCKEN, *Sinnen voorstel*, No. 456.

75, 77 en 68,

welke alzoo de drie gevraagde zijden zijn.

CL. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men op de opſtaande zijden van eenen driehoek halve cirkels beſchrijft, en men de loodlijnen uit de hoeken aan de grondlijn op de overſtaande zijden nedergelaten verlengt tot aan den omtrek der halven cirkels, dan zullen de afſtanden van den top tot deze ſnijpunten even groot zijn. En wanneer men de ſnijpunten der loodlijnen met de overſtaande zijden vereenigt door regte lijnen met de ſnijpunten op de omtrekken, dan zal het ſnijpunt dezer lijnen even ver van de ſnijpunten op de omtrekken wezen. Men vraagt naar het bewijs?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. N. CALTEN *en* J. DOORMAN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laat ABC (*Fig.* 37) de voorgeſtelde driehoek zijn, en BEC met BDA de beide halve cirkels: zoo dan de loodlijnen AE en CD benevens de lijnen BE en DE getrokken worden, dan zal men vooreerst moeten bewijzen, dat DB = BE is.

Omdat de hoeken BFC en BGA regt zijn, zoo zijn de driehoeken AGB en BFC gelijkvormig, en dus

$$AB : BG = BC : BF,$$

of

$$AB \times BF = BG \times BC,$$

en trekkende de lijnen AD en CE, zoo zijn ADB en BEC ook regte hoeken, derhalve

$$BE^2 = BG \times BC,$$

en

$$BD^2 = AB \times BF,$$

hetwelk, verbonden met de voorgaande vergelijking, onmiddelijk geeft

$$BE = BD.$$

Trekt men de lijnen BE′ en BD′, dan ziet men even gemakkelijk, dat BE = BE′ en BD = BD′ is, en dus dat ook BE′ = BD′ moet wezen. Voor het tweede gedeelte des voorſtels zal men de gelijkheid van HE en HD moeten bewijzen.

Nu is hoek BCF = BAG, en daar hoek BCF = BEF en hoek BAG = BDG is, zoo is dan ook BEF = BDG. Trekt men nu de lijn DE, dan is, wegens de gelijkheid van BD en BE, hoek

BDE

BDE = BED, derhalve ook hoek FED = EDG, waaruit onmiddellijk volgt DH = HE.

Trekt men de lijnen D'G en FE' tot zij zich in H' snijden, dan zal ook E'H' = D'H' zijn. Want trekkende de lijnen E'D', dan is hoek BE'D' = BD'E', verder is hoek BD'G = hoek BAG = hoek BCF = BEF = hoek BDG = hoek BD'G, derhalve zijn ook de hoeken H'E'D' en E'D'H' even groot, en dus E'H' = H'D'.

CII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Er is een vierkant getal van drie cijfers, welke cijfers op elkander volgende driehoekige getallen zijn; de eenheden zijn het kleinste cijfer, en dat der tientallen het grootst; de som dezer driehoekige getallen bedraagt zoo veel als de som der cijfers van den wortel, welke uit het vierkant getal getrokken kan worden; het cijfer der eenheden van dezen wortel is 8 meer dan dat der tientallen derzelve. Men vraagt naar dit getal?

Opgelost *door* J. Bassan, G. Brandsteder, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Jonkhert *en* C. F. Julius.

I. Oplossing *van* J. Bassan.

Laten de cijfers van den wortel uit het vierkante getal zijn z en $x+8$, dan is het vierkant getal $(10x+x+8)^2 = (11x+8)^2$; indien nu de wortels der driehoekige getallen zijn $z+1$, $z+2$ en z, dan zijn de cijfers van het vierkante getal

$$\frac{(z+1)^2+z+1}{2}, \quad \frac{(z+2)^2+z+2}{2}$$

en

$$\frac{z^2+z}{2},$$

derhalve het vierkante getal

$$100\frac{z^2+3z+2}{2}+10\frac{z^2+5z+6}{2}+\frac{z^2+z}{2} = (11x+8)^2,$$

of

$$55\tfrac{1}{2}z^2+175\tfrac{1}{2}z+130 = (11x+8)^2.$$

En volgens de eerste voorwaarde van het voorstel is ook

$$\frac{(z+1)^2+z+1}{2}+\frac{(z+2)^2+z+2}{2}+\frac{z^2+z}{2} = 2x+8,$$

of

$$\tfrac{3}{2}z^2+4\tfrac{1}{2}z+4 = 2x+8,$$

waaruit volgt

$$x = \tfrac{3}{4}z^2+\tfrac{9}{4}z-2,$$

en

$$s = \frac{1}{C} \int z^2 \partial \phi,$$

$$= \frac{1}{C} \int a^{2\phi} \partial \phi,$$

$$= \frac{a^{2\phi}}{2C\, Log.\, a} + D,$$

$$= \frac{z^2}{2C\, Log.\, a} + D.$$

Laat men s en ϕ te gelijk beginnen, dan is I

en dus

$$s = \frac{1}{2C\, Log.\, a}(z^2 - 1).$$

Verder is de boog

$$s = \sqrt{(1 + Log^2.\, a)} \int z \partial \phi,$$

$$= \sqrt{(1 + Log^2.\, a)} \frac{a^{\phi}}{Log.\, a} + E$$

$$= \frac{z}{Log.\, a} \sqrt{(1 + Log^2.\, a)} +$$

Neemt men $s = 0$ voor $\phi = 0$ of v

$E = -\frac{\sqrt{(1 + Log^2.\, a)}}{Log.\, a}$, en dus

$$s = \frac{\sqrt{(1 + Log^2.\, a)}}{Log.\, a}(z - 1$$

en hieruit de waarde van z in die voor s

$$\frac{1}{C\, L} \quad \int (s\, Log\, a + \quad + Log^2.$$

AANM d Men

LOBAT egeling

werp dat e

we der de

en lin

zal men hebben $MP' = \frac{1}{3} OM = \frac{1}{3} \frac{c^2}{p}$ en $Z'P' = c - \frac{1}{3} c = \frac{2}{3} c$,

en derhalve zal men door den regel van GULDIN hebben

$$\text{Omw. ligch. } ABC = \tfrac{2}{3} BC \times AC \times 2\pi PZ,$$

$$= \tfrac{8}{3} \pi . d . \frac{d^2}{p} (c + \tfrac{2}{3} d),$$

$$= \tfrac{1}{3} \pi d^3 \frac{8c + 3d}{p},$$

$$\text{Omw. ligch. } AOQ = \tfrac{2}{3} AQ \times QO \times 2\pi P'Z',$$

$$= \tfrac{4}{3} \pi . c . \frac{c^2}{p} \times \tfrac{2}{3} c = \tfrac{8}{9} \pi \frac{c^4}{p},$$

$$\text{Cilinder } CO'OQ = \pi OQ^2 \times CQ,$$

$$= \pi c^2 \frac{d^2 - c^2}{p},$$

waarvan de som is

$$\text{Omw. ligch. } O'BAO = \tfrac{1}{3} \pi \left\{ \frac{8c + 3d}{p} d^3 + 5 \frac{c^4}{p} + 6 \frac{d^2 - c^2}{p} c^2 \right\},$$

$$= \frac{\pi}{6p} \left\{ 3d^4 + 8cd^3 + 6c^2 d^2 - c^4 \right\},$$

$$= \frac{\pi}{6p} (d + c)^2 (3d - c).$$

I GEVOLG. Trekt men het *omw. ligch.* $AOQ = \frac{8}{9} \pi \frac{c^4}{p}$ af van den cilinder $AQOM = \pi c^2 \frac{c^2}{p} = \pi \frac{c^4}{p}$, dan vindt men voor den paraboliſchen kegel AMO eenen inhoud $= \frac{1}{9} \pi \frac{c^4}{p}$, dat is gelijk aan de helft van den regten kegel AOM.

II GEVOLG. Is $c = d$, dat is, gaat het bovenvlak AB' door het punt O, dan vindt men voor den inhoud

$$\frac{2}{3} \pi \frac{c^4}{p},$$

en zoo dan ook $p = c$ is, $\frac{2}{3} \pi c^3$, of tweemaal den bol, OQ tot ſtraal hebbende.

CIV. VOORSTEL.

Door P. H. VAN DER MEULEN.

Men vraagt om eene gegevene paraboloïde, den kleinſt mogelijken kegel te beſchrijven?

OPGELOST *door* P. H. VAN DER MEULEN, J. N. CALTEN *en* J. DOORMAN.

OPLOSSING *van* P. H. VAN DER MEULEN.

Zij NTQ de parabool door wier omwenteling om de as OT de paraboloïde wordt voortgebragt, en AC een raaklijn aan eenig punt M, wiens coördinaten zijn PM$=y$ en PT$=x$, zoodat de vergelijking van de parabool is $px=y^2$. Dewijl nu de raaklijn CA eenen kegel de paraboloïde rakende zal voortbrengen, zoo hebben wij den inhoud van dezen kegel te zoeken.

Nu is CT$=$PT$=x$, en zoo dus QT$=a$ genomen wordt, zal

$$AO=\frac{OC\times MP}{CP}=\frac{(a+x)y}{2x}$$

zijn, en dus

inh. kegel $AOC=\frac{1}{3}\pi AO^2\times OC$,

$$=\pi\frac{(a+x)^2y^2}{12x^2}(x+a),$$

$$=\pi\frac{(a+x)^3px}{12x^2},$$

$$=\pi\frac{(a+x)^3p}{12x}.$$

De uitdrukking $\frac{(a+x)^3}{x}$ behoeft dus slechts tot een maximum gebragt te worden, en daartoe stellen wij

$$\frac{\partial.\frac{(a+x)^3}{x}}{\partial x}=0=3x(a+x)^2-(a+x)^3.$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door $a+x=0$, doch deze waarde geene bruikbare waarde voor x gevende, deelen wij de voorgaande vergelijking door $(a+x)^2$, en wij hebben

$$3x-(a+x)=0,$$

of

$$x=\tfrac{1}{2}a,$$

en daar het tweede differentiaal quotient is

$$\frac{2x^2(2x-a)(a+x)+2x^2(a+x)^2-2x(2x-a)(a+x)^2}{x^4}$$

$$=\frac{2(a+x)(a-x)x}{x^3},$$

het-

hetwelk voor $x = \frac{1}{3}a$ eene positieve waarde gevende, een minimum aanwijst.

De inhoud van den kleinsten kegel is dus

$$\frac{\pi}{6}p.\frac{2}{3}a^2 = \frac{2}{15}a^2p.$$

De inhoud van de paraboloïde is $\frac{1}{2}\pi p a^2$, beide inhouden staan dus tot elkander als 9 : 8.

CV. VOORSTEL.

Door P. H. VAN DER MEULEN.

Men vraagt den inhoud te vinden van het gedeelte eener paraboloïde, dat door een vlak evenwijdig aan de as wordt afgesneden?

OPGELOST *door* P. H. VAN DER MEULEN, J. DOORMAN *en* J. N. CALTEN.

OPLOSSING *van* P. H. VAN DER MEULEN.

Laat CAF (*Fig.* 40) de parabool zijn, welke om de as AB draaijende de paraboloïde voortbrengt; stel verder $AE = b$ en $ED = a$, waardoor het snijdend vlak evenwijdig aan AB bepaald is; zoo nu SDR de kromme is, door de snijding van het evenwijdige vlak aan AB door D gaande voortgebragt, en de cirkel CNFO het grondvlak der paraboloïde, dan trekke men CB loodregt op SR en stelle $CP = y$, $DP = x$ en $AB = h$, alsmede de parameter van den parabool $= p$, waardoor $a^2 = pb$ is.

Nu is ook

$$BC^2 = p.AB,$$

of $$(a+y)^2 = p(x+b),$$

of ook $$a^2 + 2ay + y^2 = px + pb,$$

maar $$a^2 = pb$$

zijnde, zoo wordt dit

$$2ay + y^2 = px.$$

En daar nu ook $PR^2 = CP \times PF = y(2a+y)$ is, zoo zal dan $PR^2 = px$ wezen; derhalve waar men ook de doorsnede CNFO door de as trekt, zal de gevondene betrekking blijven bestaan; de kromme SDR is dus eene parabool gelijk en gelijkvormig aan den voortbrengenden parabool CAF.

Onderstellende nu op eenen willekeurigen afstand $D'E' = z$ en

vlak evenwijdig aan het vlak DSR, dan zal de inhoud van de parabool R′S′D′ voorgeſteld worden door

$$\frac{4}{3}P'R'\times D'P'=\frac{4}{3}P'R'\left(h-\frac{z^2}{p}\right)=\frac{4}{3}\left(h-\frac{z^2}{p}\right)\sqrt{(CP'\times FP')}$$

$$=\frac{4}{3}\left(h-\frac{z^2}{p}\right)\sqrt{(ph-z^2)}=\frac{4}{3p}(ph-z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Indien men dus een vlak op den afſtand ∂z van het vlak S′D′R′ evenwijdig aan hetzelve laat gaan, dan zal men voor den inhoud I mogen ſchrijven

$$I=\frac{4}{3p}\int(ph-z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z,$$

waarvoor men ſchrijven kan

$$I=\frac{4}{3p}\left\{z(hp-z^2)^{\frac{3}{2}}+3\int z^2(hp-z^2)^{\frac{1}{2}}\partial z\right\}$$

$$=\frac{4}{3p}\left\{z(hp-z^2)^{\frac{3}{2}}-3\int(-z^2-hp+hp)(hp-z^2)^{\frac{1}{2}}\partial z\right\}$$

$$=\frac{4}{3p}\left\{z(hp-z^2)^{\frac{3}{2}}+3hp\int(hp-z^2)^{\frac{1}{2}}\partial z-3\int(hp-z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z\right\},$$

waaruit volgt

$$\int\partial z(ph-z^2)^{\frac{3}{2}}=z(hp-z^2)^{\frac{3}{2}}+3hp\int(hp-z^2)^{\frac{1}{2}}\partial z-3\int(hp-z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z$$

of $\int\partial z(ph-z^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}z(hp-z^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}hp\int(hp-z^2)^{\frac{1}{2}}\partial z$

$$=\frac{1}{4}z(hp-z^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}hp\left(z\sqrt{(hp-z^2)}+hp\,Boog.Sin.\frac{z}{\sqrt{hp}}\right);$$

en derhalve

$$I=\frac{4}{3p}\left\{C+\tfrac{1}{4}z(hp-z^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{3}{8}hpz\sqrt{(hp-z^2)}+\tfrac{3}{8}h^2p^2\,Boog.Sin.\frac{z}{\sqrt{hp}}\right\}$$

$$=\frac{4}{3p}C+\tfrac{1}{3}\frac{z}{p}(hp-z^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{2}hz\sqrt{(hp-z^2)}+\tfrac{1}{2}h^2p\,Boog.Sin.\frac{z}{\sqrt{hp}}.$$

Wil men den inhoud van het gedeelte ANOF vinden, dan moet deze integraal van $z=o$ tot $z=\sqrt{hp}$ genomen worden, en dit geeft

$$I=\tfrac{1}{2}h^2p.\tfrac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{4}ph^2,$$

gelijk buitendien bekend is; voor het gedeelte ANORSD alwaar $DE=a$ en alzoo $z=a$ is, heeft men dan

I′=

$$I' = \tfrac{1}{5}\frac{a}{p}(hp-a^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4}ha\sqrt{(hp-a^2)} + \tfrac{1}{2}h^2p\ Boog.Sin.\frac{a}{\sqrt{hp}}.$$

en derhalve voor het gedeelte FADRS

$$I+I' = \frac{\pi}{4}ph^2 + \frac{a}{6}(5h - \frac{2a^2}{p})\sqrt{(hp-a^2)} + \tfrac{1}{2}h^2p\,Sin.Boog.\frac{a}{\sqrt{hp}}.$$

De uitdrukking voor I' kan ook op de volgende wijze herleid worden, en alsdan de waarde der termen uit de figuur afgeleid worden; namelijk

$$I' = \tfrac{1}{6}a(hp-a^2)^{\frac{1}{2}}(5h - \frac{2a^2}{p}) + h^2p\ Boog.\ Sin.\frac{a}{\sqrt{hp}}$$

zijnde, zoo is verder $hp = BC^2$, $a = DE = PB$, dus $\sqrt{(hp-a^2)} = PS$, $\frac{a^2}{p} = AE$ en $Boog.Sin.\frac{a}{\sqrt{ph}} = Boog.Sin.\frac{PB}{BC} = \frac{Boog.NS}{BC}$, en derhalve

$I' = \tfrac{1}{6}DE \times PS\,(5AB - 2AE) + \tfrac{1}{4}AB.BC\ Boog.NS$
$= \tfrac{1}{3}DE \times PS.(AB-AE) + \tfrac{1}{4}DE \times PS \times AB + \tfrac{1}{4}AB \times BC\,Boog.SN$
$= \tfrac{1}{3}PB \times PS \times BE + \tfrac{1}{4}AB(PB \times PS + BC\,Boog\,SN)$.

Omdat nu $PB \times PS = inh.\ driehoek$ PSR en $BC\ boog\ SN = 2\ sector$ NBS is, zoo is ook $PB \times PS + BC\ boog\ SN = opperv.\ segt.$ NORS en wij hebben voor den geheelen inhoud

$$I' = \tfrac{1}{3}BE \times inh.drieh.\,BSR + \tfrac{1}{4}AB \times segt.NORS,$$

of wel de inhoud is gelijk aan de som van den inhoud eener piramide, welke *drieh.* PBR tot bazis en BE tot hoogte heeft, en van het halve prisma welke het *segment* NORS tot bazis en AB tot hoogte heeft.

CVI. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK, ROELDZ.

Een stuurman, aan strand staande, wil den afstand van een stil liggend schip tot aan het strand berekenen. Daartoe meet hij regthoekig op de rigting van het strand eene lijn AB = 12 *roeden, en stelt in* B *een baken; verder meet hij uit* A *regthoekig op* AB *langs het strand* 17 *roeden tot in* C, *alstoen zag hij het schip juist over het baken in* B. *Van* C *in het verlengde van* AC *voortgaande* 21 *roeden tot in* D, *gaat hij van daar regthoekig op* AD 8 *roeden tot in* E, *alwaar hij weder een baken stelt, en eindelijk in het verlengde van* AC *van* D *naar* F *gaande meet hij* 15 *roeden, en zag*

toen het ſchip over het baken E. *Men vraagt den afſtand van het ſchip tot het ſtrand of de lijn* AF? (*)

OPGELOST *door* J. VAN WIJK, ROELDZ., J. BASSAN, J. DOORMAN, G. GRAAFLAND, J. JONKHERT *en* G. BRANDSTEDER.

OPLOSSING *van* J. VAN WIJK, ROELDZ.

Laat in *Fig.* 41. S de plaats van het ſchip en GF de rigting van het ſtrand voorſtellen, zoodat nu AB = 12, AC = 17, CD = 21, DF = 15 en DE = 8 roeden zij; indien men dan EH evenwijdig aan SC trekt, dan zijn de driehoeken ABC en DEH gelijkvormig, en daaruit volgt

$$AB : AC = DE : DH,$$

of $$DH = \frac{AC \times DE}{AB} = \frac{17 \cdot 8}{12} = 11\frac{1}{3},$$

dit afgetrokken van $DF = 15,$

komt er $HF = 3\frac{2}{3}.$

Verder zijn de driehoeken EHF en CSF gelijkvormig, dewijl hoek FEH = hoek CSF is, en daaruit volgt

$$FH : CF = DE : GS,$$

of $$GS = \frac{CF \times DE}{FH} = \frac{8 \cdot 36}{3\frac{2}{3}} = 78\frac{6}{11} \text{ roeden.}$$

Men heeft ook nog

$$FH : CF = DH : GC,$$

dus $$GC = \frac{CF \times DH}{FH} = \frac{36 \times 11\frac{1}{3}}{3\frac{2}{3}} = 111\frac{3}{11} \text{ roeden;}$$

voor den afſtand van de loodlijn SG tot C.

CVII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt het zwaartepunt van den boog eener parabool te vinden, in de onderſtelling, dat de belasting van elk punt evenredig is met den afſtand van dit punt tot de as?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN., J. DOORMAN, J. N. CALTEN *en* J. JONKHERT.

Laat in *Fig.* 42. AM een gedeelte van eene parabool voorſtellen, wier top in A en wier as AX is; nemen wij verder voor de ver-

(*) J. A. VAN DAM, *Nieuwe Hoorſche Schatkamer*, No. 32 der beſtuit queſtiën.

vergelijking dezer parabool $y^2=px$, dan zal men het gewigt van de differentiaal des boogs kunnen voorstellen door

$$\alpha x V(\partial x^2+\partial y^2),$$

het moment van dit gewigt tot de as AX is dan

$$\alpha y x V(\partial x^2+\partial y^2),$$

en tot de as AY

$$\alpha x^2 V(\partial x^2+\partial y^2).$$

Is dus Z het zwaartepunt, dan hebben wij

$$ZZ'=\frac{\int y x V(\partial x^2+\partial y^2)}{\int x V(\partial x^2+\partial y^2)} \quad \ldots\ldots \text{(I)},$$

en

$$AZ'=\frac{\int x^2 V(\partial x^2+\partial y^2)}{\int x V(\partial x^2+\partial y^2)} \quad \ldots\ldots \text{(II)}.$$

Nu is verder $y^2=px$,

en $2y\partial y=p\partial x$,

waardoor nu de vergelijkingen (I) en (II) kunnen geïntegreerd worden; beginnen wij dan met den teller van (I), zoo hebben wij

$$\int y x V(\partial x^2+\partial y^2)=\frac{1}{p^2}\int y^3\partial y V(p^2+4y^2),$$

of door $p^2+4y^2=u^2$

te stellen

$$\int y x V(\partial x^2+\partial y^2)=\frac{1}{16p^2}\int(u^2-p^2)u^3\partial u$$

$$=\frac{1}{16p^2}\left\{\tfrac{1}{5}u^5-\tfrac{1}{3}p^2u^3+C\right\}$$

$$=\frac{1}{16p^2}\left(\left\{\tfrac{1}{5}(p^2+4y^2)-\tfrac{1}{3}p^2\right\}(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}+C\right)$$

$$=\frac{1}{120p^2}\left\{(2y^2-p^2)(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{15}{2}C\right\}.$$

De noemer wordt

$$\int x V(\partial x^2+\partial y^2)=\frac{1}{p^2}\int y^2\partial y V(4y^2+p^2)$$

$$=\frac{2}{p^2}\int y^2\partial y V(y^2+\tfrac{1}{4}p^2)$$

$$=\frac{2}{p^2}\left\{\tfrac{1}{8}y(\tfrac{1}{4}p^2+2y^2)V(\tfrac{1}{4}p^2+y^2)-\frac{p^4}{8.16}Log.(y+V(\tfrac{1}{4}p^2+y^2))+C'\right\}$$

(I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* §. 211.)

=

$$= \frac{1}{p^2}\left\{\tfrac{1}{4}y(\tfrac{1}{4}p^2+2y^2)\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+y^2)} - \frac{p^4}{64}Log.(y+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+y^2)}) + 2C'\right\}.$$

Derhalve

$$ZZ' = \frac{(2y^2-p^2)(p^2+4y^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{15}{2}C}{60y(\frac{1}{4}p^2+2y^2)\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+y^2)} - \frac{15}{32}p^4 Log.(y+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+y^2)}) + 60C'}.$$

Telt men de boog van den top A af, dan moet voor $y=o$ zoo wel de teller als de noemer $=o$ zijn, dit geeft dan

$$ZZ' = \frac{(2y^2-p^2)(p^2+4y^2)^{\frac{5}{2}} - p^5}{15y(p^2+8y^2)\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+y^2)} - \frac{15}{32}p^4\left\{Log.(y+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+y^2)}) - L.\tfrac{1}{2}p\right\}}.$$

Voor den teller van (II) heeft men

$$\int x^2\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)} = \frac{1}{p^2}\int y^4\partial y\sqrt{(y^2+p^2)}$$

$$= \frac{2}{p^2}\int y^4\partial y\sqrt{(y^2+\tfrac{1}{4}p^2)}$$

$$= \frac{2}{p^2}\left\{\tfrac{1}{48}y(-3p^4+2p^2y^2+8y^4)\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+y^2)} + \frac{p^6}{16.64}Log.(y+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+y^2)}) + C'\right\},$$

(I. R. SCHMIDT, *Int. en Diff. Rek.* §. 211.)

of $\int x^2\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)} = \frac{1}{384p^2}\left\{y(-3p^4+8p^2y^2+128y^4)\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+y^2)} + \tfrac{3}{8}p^6 Log.(y+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+y)}) + C'\right\}$,

en van A beginnende te tellen

$$\int x^2\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)} = \frac{1}{384p^2}\left\{y(128y^4+8p^2y^2-3p^4)\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+y^2)} + \tfrac{3}{8}p^6(Log.(y+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+y^2)}) - Log.\tfrac{1}{2}p)\right\},$$

zoodat nu eindelijk

$$AZ' = \frac{y(128y^4+8p^2y^2-3p^4)\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+y)} + \tfrac{3}{8}p^6 Log.\frac{2y+\sqrt{(p^2+4y^2)}}{p}}{12y(p^2+8y^2)\sqrt{(p^2+4y^2)} - 6p^2 Log.\frac{2y+\sqrt{(p^2+4y^2)}}{p}}.$$

CVIII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Van eenen bolvormigen driehoek zijn drie der zijden, benevens de twee ingeſloten hoeken gegeven, men vraagt de vierde zijde, benevens

wens de twee overige hoeken en de beide bolvormige diagonalen in deze gegevens uit te drukken?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN., J. N. CALTEN, J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Laat ABCD (*Fig.* 43) de bolvormige vierhoek zijn, en ſtellen wij $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, hoek $ABC = \alpha$ en hoek $BCD = \beta$, de diagonalen BD en AC getrokken zijnde, hebben wij terſtond uit den driehoek BDC

$$Cos.\,BD = Cos.\,\beta\,Sin.\,b\,Sin.\,c + Cos.\,b\,Cos.\,c \quad . \quad . \quad (1),$$

en uit den driehoek ABD

$$Cos.\,AD = Cos.\,\alpha\,Sin.\,a\,Sin.\,BD + Cos.\,a\,Cos.\,BD.$$

Hierin voor BD zijne waarde uit (1) geſteld, komt er

$$Cos.\,AD = Cos.\,\alpha\,Sin.\,a\sqrt{\{1-(Cos.\,\beta\,Sin.\,b\,Sin.\,c+Cos.\,b\,Cos.\,c)^2\}} + Cos.\,a\,(Cos.\,\beta\,Sin.\,b\,Sin.\,c+Cos.\,b\,Cos.\,c) \quad . \quad . \quad (2).$$

Verder is $$Sin.\,BAD = \frac{Sin.\,BD\;Sin.\,\alpha}{Sin.\,AD},$$

en hierin voor BD en AD hunne waarde uit (1) en (2) geſteld, geeft

$$Sin.\,BAD = \frac{Sin.\,a\sqrt{\{1-(Cos\,\beta\,Sin.\,b\,Sin.\,c+Cos.\,b\,Cos.\,c)^2\}}}{Sin.\,AD} \quad (3),$$

waarin nu uit (2) kan geſteld worden

$$Sin^2.\,AD = 1 - Cos^2.\,a\,(Cos.\,\beta\,Sin.\,b\,Sin.\,c+Cos.\,b\,Cos.\,c)^2 - Cos^2.\,a\,Sin^2.\,a + Cos^2.\,a\,Sin^2.\,a\,(Cos\,\beta\,Sin.\,b\,Sin.\,c+Cos.\,b\,Cos.\,c)^2 - 2\,Cos\,a\,Sin.\,a\,Cos.\,a\,(Cos.\,\beta\,Sin.\,b\,Sin.\,c+Cos.\,b\,Cos.\,c)\sqrt{\{1-(Cos.\,\beta\,Sin.\,b\,Sin.\,c+Cos\,b\,Cos.\,c)^2\}},$$

$$= 1 - Cos^2.\,a\,Sin^2.\,a - (Cos.\,\beta\,Sin.\,b\,Sin.\,c+Cos.\,b\,Cos.\,c)^2\{Cos^2.\,a - Cos^2.\,a\,Sin^2.\,a + 2\,Cos\,a\,Sin.\,a\,Cos.\,a\sqrt{(\frac{1}{(Cos.\,\beta\,Sin.\,b\,Sin.\,c-Cos.\,b\,Cos.\,c)^2}-1)}\}.$$

Voor de tweede diagonaal hebben wij uit den driehoek ABC

$$Cos.\,AC = Cos\,a\,Sin.\,a\,Sin.\,b + Cos.\,a\,Cos.\,b \quad . \quad . \quad (4),$$

en uit driehoek ACD

$$Cos.\,ADC = \frac{Cos.\,AC - Cos.\,c\,Cos.\,AD}{Sin.\,c\,Sin.\,AD},$$

en hierin voor AD en AC hunne waarde uit (2) en (4) ſtellende, komt er

$$Cos.ADC = \{Cos.\alpha\ Sin\ a\ Sin.b + Cos.a\ Cos.b - Cos.\alpha\ Sin.a Cos.c \sqrt{(1 - (Cos.\beta Sin\ b Sin.c + Cos.b Cos.c)^2)} - Cos.e Cos.a (Cos.\beta Sin.b Sin\ c + Cos.b\ Cos.c)\} : Sin.c \{1 - Cos^2.\ \alpha\ Sin^2.a - (Cos.\beta\ Sin.b\ Sin.c + Cos.b\ Cos.c)^2 (Cos^2.a - Cos^2.a\ Sin^2.a + 2\ Cos.a\ Sin.a\ Cos.a) \ldots$$

$$\sqrt{\frac{1}{(Cos.\beta\ Sin.b\ Sin.c + Cos.b\ Cos.c)^2} - 1)\}} \ldots (5).$$

CIX. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt het zwaartepunt te vinden van het vlak, begrepen tusschen twee polaire ordinaten en den overeenkomstigen boog van de kromme, wier polaire vergelijking is $z = a\ Tang^2.\phi$?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN., J. N. CALTEN, J. DOORMAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Volgens I. R. SCHMIDT, *Statica*, I Deel, §. 96, heeft men voor den afstand Z van het zwaartepunt der ruimte begrensd door eene kromme lijn en door hare voerstralen tot aan den oorsprong der hoeken, de formule

$$z = \tfrac{3}{8} \frac{\int z^3\ Sin.\phi\ \partial\phi}{\int z^2\ \partial\phi} \ldots\ldots (1),$$

en voor den afstand van dit zwaartepunt tot aan eene as loodregt op den oorsprong der hoeken door de pool getrokken

$$Z' = \tfrac{3}{8} \frac{\int z^3\ Cos.\phi\ \partial\phi}{\int z^2\ \partial\phi} \ldots\ldots (2),$$

en daar nu hier

$$z = a\ Tang^2.\phi$$

is, zoo hebben wij

$$\int z^3\ Sin.\phi\ \partial\phi = a^3 \int Tang^6.\phi\ Sin.\phi\ \partial\phi$$

$$= -a^3 \int \frac{Sin^6.\phi\ \partial\ Cos.\phi}{Cos^6.\phi}$$

$$= -a^3 \int \frac{(1 - Cos^2.\phi)^3\ \partial\ Cos.\phi}{Cos^6.\phi},$$

of stellende $Cos.\phi = u$

$$\int z^3\ Sin.\phi\ \partial\phi = -a^3 \int \frac{(1 - u^2)^3}{u^6}\ \partial u$$

$$= a^3 \int \{1 - \frac{3}{u^2} + \frac{3}{u^4} - \frac{1}{u^6}\}\ \partial u$$

=

$$= a^3\left\{u + \frac{3}{u} - \frac{1}{u^3} + \frac{1}{5u^5} + C\right\}$$

$$= a^3\left\{Cos.\Phi + \frac{3}{Cos.\Phi} - \frac{1}{Cos^3.\Phi} + \frac{1}{5Cos^5.\Phi} + C\right\}$$

$$= \frac{a^3\,(Cos^6.\Phi + 3\,Cos^4\,\Phi - Cos^2.\Phi + \frac{1}{5} + C\,Cos^5\Phi}{Cos^5.\Phi}$$

Voor den noemer van (1) hebben wij

$$\int z^2 \partial\Phi = a^2 \int Tang^4.\Phi\,\partial\Phi$$

$$= a^2 \int \frac{(1 - Cos^2.\Phi)^2}{Cos^4.\Phi}\partial\Phi$$

$$= a^2 \int \left\{\frac{\partial\Phi}{Cos^4.\Phi} - \frac{2\,\partial\Phi}{Cos^2.\Phi} + \partial\Phi\right\}$$

$$= a^2\left\{\frac{1}{3}\frac{Sin.\Phi}{Cos^3.\Phi} + \frac{2}{3}\frac{Sin.\Phi}{Cos.\Phi} - 2\,Tang.\Phi + \Phi + C'\right\}.$$

De vergelijking (1) geeft dus

$$Z = \frac{2a}{3} \cdot \frac{Cos^6.\Phi + 3Cos^4.\Phi - Cos^2.\Phi + \frac{1}{5} + CCos^5.\Phi}{\frac{1}{3}Sin.\Phi C^2.\Phi + \frac{2}{3}Sin.\Phi C^4.\Phi - 2Sin.\Phi C^2.\Phi + \Phi C^5.\Phi + C' C^5.\Phi}$$

$$= \frac{2a}{5} \cdot \frac{5Cos^6.\Phi + 5CCos^5.\Phi + 15Cos^4.\Phi - 5Cos^2.\Phi + 1}{Sin.\Phi Cos^2. - 4Sin.\Phi Cos^4.\Phi + 3\Phi Cos^6.\Phi + 3C' Cos^5.\Phi}.$$

Voor de vergelijking (2) hebben wij

$$\int z^3 Cos.\Phi\,\partial\Phi = a^3 \int \frac{Sin^6.\Phi\,Cos.\Phi\,\partial\Phi}{Cos^6.\Phi}$$

$$= a^3 \int \frac{(1 - Cos^2.\Phi)^3\,\partial\Phi}{Cos^5.\Phi}$$

$$= a^3 \int \left\{\frac{\partial\Phi}{Cos^5.\Phi} - \frac{3\,\partial\Phi}{Cos^3.\Phi} + \frac{3\,\partial\Phi}{Cos.\Phi} - Cos.\Phi\,\partial\Phi\right\}$$

$$= a^3\left\{\frac{1}{4}\frac{Sin.\Phi}{Cos^4.\Phi} + \frac{3}{2.4}\left(\frac{Sin.\Phi}{Cos^2.\Phi} + Log.Tang.(45 + \tfrac{1}{2}\Phi)\right)\right.$$

$$\left. - \frac{3}{2}\frac{Sin.\Phi}{Cos^2.\Phi} + \frac{3}{2}Log.Tang.(45 + \tfrac{1}{2}\Phi) + Sin.\Phi + C\right\}.$$

$$= \frac{a^3}{8Cos^4.\Phi}\left\{2Sin.\Phi + 3\,Sin.\Phi\,Cos^2.\Phi + 15Cos^4.\Phi Log.Tang.(45 + \tfrac{1}{2}\Phi)\right.$$

$$\left. - 24Sin.\Phi Cos^4.\Phi + 8Sin.\Phi Cos^4.\Phi + 8CCos^4.\Phi\right\},$$

en derhalve $Z' = \frac{1}{4}\frac{a}{Cos.\Phi} \times$ . . . . . .

$$\frac{2\,Sin.\Phi - 21\,S.\Phi Cos^2\,\Phi + 8\,S.\Phi C^4.\Phi + 15'^4.\Phi L.Ta.(45 + \frac{1}{2}\Phi) + 8C\,C^4\,\Phi}{Sin\,\Phi - 4\,Sin.\Phi Cos^2.\Phi + 3\Phi Cos^3.\Phi + 3C'\,Cos^3.\Phi}$$

CX. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt naar drie getallen; zoodat driemaal het kleinſte plus een gelijk is aan het tweevoud van het middelſte. De ſom der kwadraten van de beide kleinſte is een meer dan dat van het grootſte. Eindelijk is de heptagonaal van het grootſte plus 8 gelijk aan de ſom van de pentagonaal van het kleinſte en de octagonaal van het middelſte getal?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. JONKHERT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Laten de drie gevraagde getallen zijn x, y en z, dan volgt uit de algemeene formule der veelhoekige getallen naar aanleiding van het voorſtel, dat

$$3x+1=2y \quad \ldots \quad (1),$$

$$x^2+y^2=z^2+1 \quad \ldots \quad (2),$$

en $$\frac{5z^2-3z}{2}+8=\frac{3x^2-x}{2}+3y^2-2y \quad \ldots \quad (3).$$

De waarde van y uit (1) in (2) geſteld, geeft

$$4x^2+9x^2+6x+1=4z^2+4,$$

of $$13x^2+6x=4z^2+3 \quad \ldots \quad (4).$$

De waarde van y uit (1) in (3) geſteld, geeft

$$5z^2-3z+16=3x^2-x+\tfrac{3}{2}(9x^2+6x+1)-6x-2,$$

of $$10z^2-6z=36x^2+4x-33,$$

en hierin voor z^2 zijne waarde uit (4) geſteld, geeft

$$\frac{13x^2+6x-3}{2}-6z=33x^2+4x-33;$$

of $$127=51+22x-x^2,$$

de waarde van z uit deze vergelijking in (4) geſteld, geeft na behoorlijke herleiding

$$x^4-44x^3-86x^2+2088x+2709=0,$$

waaraan door $x=7$ voldaan wordt, en hierdoor vindt men uit (4)

$$z=13,$$

en uit (1) $$y=11.$$

CXI. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men vraagt naar eenen driehoek, wiens zijden en inhoud in ra-

rationale getallen zijn uitgedrukt, en alwaar een der hoeken het drievoud van een der overigen is? (*)

OPGELOST *door* K. SMIT, J. BASSAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Laat BAC (*Fig.* 44) eenen hoek zijn welke door de lijnen AE, AD in drie gelijke deelen verdeeld wordt, en trekken wij BC zoodanig dat hoek ABC = BAE zij, dan is de driehoek ABE gelijkbeenig of BE = AE, en dezelve voldoet aan de laatste voorwaarde des Voorstels. Verder is *hoek* AEC = 2 *hoek* ABE = *hoek* EAC, dus is ook driehoek AEC gelijkbeenig of AC = EC. Stelt men nu AB = 2*u*, AC = *x*, AD = *y* en BE = *z*, zoo hebben wij, omdat AE den hoek BAD in twee gelijke deelen verdeelt

$$AB : AD = BE : DE,$$

of

$$2u : y = z : DE,$$

of

$$DE = \frac{yz}{2u}.$$

Om dezelfde rede

$$AE : AC = ED : DC,$$

of

$$z : x = \frac{yz}{2u} : DC,$$

en

$$DC = \frac{xy}{2u}.$$

Verder is ook $AE \times AC = AD^2 + ED \times DC,$

of

$$2x = y^2 + \frac{y^2 zx}{4u^2},$$

waaruit volgt

$$x = \frac{4y^2u^2}{4u^2z - y^2z}.$$

Maar nu is ook $AC = CE = DC + DE,$

of

$$x = \frac{xy}{2u} + \frac{yz}{2u},$$

dat is

$$x = \frac{yz}{2u - y},$$

of

$$\frac{4y^2u^2}{(4u^2 - y^2)z} = \frac{yz}{2u - y},$$

en

(*) P. HALCKEN, *Sinnen confect*, No. 439.

en dus $\frac{4yu^2}{2u+y} = z^2$,

of $y = \frac{2uz^2}{4u^2 - z^2}$.

De loodlijnen FE en AG trekkende, zoo is ook

$$FE^2 = BE^2 - BF^2,$$

of $$FE^2 = z^2 - u^2,$$

alsmede daar de driehoeken ABG en BEF gelijkvormig zijn

$$BE : EF = AB : AG,$$

of $$z : \sqrt{(z^2 - u^2)} = 2u : AG,$$

en $$AG = \frac{2uz}{\sqrt{(z^2 - u^2)}}.$$

Aan al de voorwaarden van het vraagstuk is nu voldaan zoodra AG rationaal is, en hieraan wordt voldaan door te nemen

$$z = m^2 + n^2 \text{ en } u = 2mn,$$

want dan is $$z^2 - u^2 = (m^2 - n^2)^2,$$

en alzoo $$AG = \frac{4mn(m^2 + n^2)}{m^2 - n^2},$$

als mede $$AC = \frac{y(m^2 + n^2)}{16m^2n^2 - (m^2 + n^2)^2}.$$

Neemt men, bij voorbeeld, $m = 2$ en $n = 1$ dan is $z = 5$ en $u = 4$, hierdoor is dan $AG = \frac{40}{3}$,

$$y = \frac{8 \cdot 25}{(64 - 25)} = \frac{200}{39},$$

$$x = AC = \frac{200 \cdot 5}{8 \cdot 39 - 200} = \frac{275}{4} = 11\frac{1}{2}.$$

Wij hebben dan $$AB = 8,$$

$$AC = \frac{25}{2},$$

$$BC = z + x = \frac{35}{2},$$

of wel al de zijden met 6 vermenigvuldigende, heeft men voor de drie zijden

48, 75 en 105,

en voor de loodlijn 40, derhalve de inhoud $= 2100$.

CXII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men vraagt naar eenen driehoek van wien de omtrek gegeven is, en van welke een der zijde 2 meer dan een der andere is, en wiens in-

inhoud een maximum is; alles bovendien in rationale getallen uitgedrukt zijnde?

OPGELOST *door* K. SMIT, J. BASSAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Stel voor de drie zijden van den driehoek $x-1$; $x+1$ en $2y$, dan is aan de eerste voorwaarde voldaan; stellende nu den geheelen omtrek $=a$, dan is

$$a=2x+2y \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

De halve som der zijden is nu $x+y$, en derhalve de inhoud

$$\sqrt{(x+y)(x+y-x+1)(x+y-x-1)(x-y)}.$$

Voor dezen inhoud kan men ook schrijven

$$\sqrt{(x+y)(y+1)(y-1)(x-y)}=\sqrt{(x^2-y^2)(y^2-1)},$$

en daar volgens (1)

$$\partial x+\partial y=0$$

is, zoo wordt het eerste differentiaal quotient van het vierkant des inhouds

$$\frac{2(x\partial x-y\partial y)(y^2-1)+2(x^2-y^2)y\partial y}{\partial x},$$

$$=2\{(x+y)(y^2-1)-(x^2-y^2)y\},$$

$$=2(x+y)\{y^2-1-y(x-y)\},$$

$$=2(x+y)(2y^2-yx-1).$$

Het tweede differentiaal quotient is

$$\{2(\partial x+\partial y)(2y^2-yx-1)+2(x+y)(4y\partial y-x\partial y-y\partial x)\}\frac{1}{\partial x^2},$$

hetwelk door $\partial x+\partial y=0$ wordt

$$2(x+y)(-5y+x).$$

Het eerste differentiaal quotient wordt $=0$ voor $x+y=0$ of voor

$$2y^2-yx-1=0.$$

Uit de eerste onderstelling volgt $x=-y$, en geeft een oneigenlijk antwoord, dewijl alsdan een der zijden negatief zou worden. De tweede onderstelling geeft

$$x=\frac{2y^2-1}{y},$$

en hierdoor wordt het tweede differentiaal quotient

27

(*) P. HALCKEN, *Sinnen oefset*, No 499.

OPGELOST *door* K. SMIT *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Laat in *Fig.* 46 wederom ZTN den middagcirkel, NZ den horizon en P de pool voorstellen, alsmede Q*m* de zons-declinatiecirkel. Dan zal volgens het voorstel SW = P*n* zijn, terwijl S*m* de cosinus voorstelt van den uurhoek β, als *m*Q de straal is, zijnde hier volgens de opgave $\beta = 78^{\circ}45'$. Stellende nu hoek PWN = ϕ, dan is

$$Sin.\,\phi = \frac{S\,m}{SW},$$

als mede $$Cos.\,\beta = \frac{S\,m}{m\,Q}.$$

Verder is $$m\,W = SW\,Cos.\,\phi,$$

en $$m\,Q^2 = R\,m \times m\,P,$$
$$= (RW - mW)(RW + mW),$$
$$= RW^2 - m\,W^2,$$
$$= RW^2 - SW^2\,Cos^2.\,\phi.$$

Maar daar ook $$m\,Q^2 = \frac{S\,m^2}{Cos^2.\,\beta}$$

is, zoo hebben wij

$$S\,m^2 = Cos^2.\,\beta\,(RW^2 - SW^2\,Cos^2.\,\phi),$$

en daar $$S\,m^2 = SW^2\,Sin^2.\,\phi$$

zoo is $$SW^2\,Sin^2.\,\phi = Cos^2.\,\beta\,(RW^2 - SW^2\,Cos^2.\,\phi).$$

Maar daar ook $$SW^2 = ZW^2\,Sin^2.\,\phi,$$
$$= RW^2\,Sin^2.\,\phi,$$

zoo is dan $$Sin^4.\,\phi = Cos^2.\,\beta\,(1 - Cos^2.\,\phi\,Sin^2.\,\phi),$$

of $$Sin^4.\,\phi = Cos^2.\,\beta\,(1 - (1 - Sin^2.\,\phi)\,Sin^2.\,\phi),$$
$$= Cos^2.\,\beta\,(1 - Sin^2.\,\phi + Sin^4.\,\phi),$$

of $$Sin^4.\,\phi = Cos^2.\,\beta\,(Cos^2.\,\phi + Sin^4.\,\phi),$$

en $$Sin^2.\,\beta\,Sin^4.\,\phi = Cos^2.\,\beta\,Cos^2.\,\phi,$$

dan $$Sin.\,\beta\,Sin^2.\,\phi = Cos.\,\beta\,Cos.\,\phi;$$

verder $$Sin.\,\beta\,(1 - Cos^2.\,\phi) = Cos.\,\beta\,Cos.\,\phi,$$

waaruit volgt $$Cos^2.\,\phi + Cot.\,\beta\,Cos.\,\phi = 1,$$

dus $$Cos.\,\phi = -\tfrac{1}{2}Cot.\,\beta + \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4}Cot^2.\,\beta)}.$$

Hierin voor β zijne waarde gesteld komt er

$$\phi = 22^{\circ}36'$$ poolshoogte.

CXV.

CXV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men de loodlijnen, welke uit de hoeken aan de basis op de overſtaande zijden van eenen driehoek vallen, verlengt tot aan de lijn, welke door den tophoek evenwijdig aan de basis getrokken wordt, zoo ontſtaan daardoor twee driehoeken ter wederzijde van den eerſten; zoo nu de ſtralen van de ingeſchreven cirkels dezer twee driehoeken en den tophoek van den begeerden driehoek gegeven zijn, vraagt men dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN *en* C. E. H. HOMBACH.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laat ABC, *Fig.* 47, de driehoek, EB evenwijdig aan AC, en AD, CE de loodlijnen op BC en AE zijn, indien men dan in de driehoeken BFD en EGB cirkels beſchrijft, zijn $IM = a$ $NK = b$ en hoek $ABC = \alpha$ bekend.

Stellende dan nog hoek $CBD = \phi$, zoo heeft men uit den regthoekigen driehoek IMB

$$BI = IM\ Cot.\ IBM,$$
$$= a\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\phi,$$

dus $$BF = a + a\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\phi.$$

Uit den driehoek AFB volgt even zoo

$$AB = \frac{FB}{Sin.\ BAF} = \frac{BF}{Cos.\ \alpha},$$
$$= a\frac{1 + Cot.\ \tfrac{1}{2}\phi}{Cos.\ \alpha}.$$

Uit den driehoek ABC

$$BC = AB\frac{Sin.\ BCA}{Sin.\ BCA} = AB\frac{Sin.\ (BAF + FAC)}{Sin.\ BCA},$$
$$= AB\frac{Sin.\ (90 - \alpha + 90 - \phi)}{Sin.\ \phi},$$
$$= AB\frac{Sin.\ (\alpha + \phi)}{Sin.\ \phi},$$
$$= a\frac{(1 + Cot.\ \tfrac{1}{2}\phi)\ Sin.\ (\alpha + \phi)}{Cos.\ \alpha\ Sin.\ \phi}.$$

Eindelijk uit den driehoek BGC

$$BG = BC\ Sin.\ BCG = BC\ Cos.\ \alpha,$$

$$= \frac{a(1+Cot.\frac{1}{2}\phi)\,Sin.(\alpha+\phi)}{Sin.\phi}.$$

Maar nu is BG = GK + BK, derhalve

$$BG = b + b\,Tang.\tfrac{1}{2}(\alpha+\phi).$$

Deze beide waarden van BG aan elkander gelijk ſtellende, komt er

$$\frac{a(1+Cot.\frac{1}{2}\phi)\,Sin.(\alpha+\phi)}{Sin.\phi} = b + b\,Tang.\tfrac{1}{2}(\alpha+\phi) \quad . \quad (\alpha).$$

Voor $\frac{Sin.(\alpha+\phi)}{Sin.\phi}$ kan men ſchrijven

$$\frac{Sin.(\alpha+\phi)}{Sin.\phi} = \frac{Sin.\alpha\,Cos.\phi + Cos.\alpha\,Sin.\phi}{Sin.\phi},$$

$$= Cos.\alpha(Tang.\alpha\,Cot.\phi + 1),$$

$$= Cos.\alpha\,(Tang.\alpha\frac{Cot^2.\frac{1}{2}\phi - 1}{2\,Cot.\frac{1}{2}\phi} + 1).$$

Hetwelk in (α) geſteld geeft

$$a(1+Cot.\tfrac{1}{2}\phi)Cos.\alpha\,(1+Tang.\alpha\frac{Cot^2.\frac{1}{2}\phi-1}{2Cot.\frac{1}{2}\phi}) = b(1+\frac{Tang.\frac{1}{2}\alpha+Tang.\frac{1}{2}\phi}{1-Tang.\frac{1}{2}\alpha\,Tang.\frac{1}{2}\phi}),$$

$$\text{of } \frac{a}{b}(1+Cot.\tfrac{1}{2}\phi)Cos.\alpha(2Cot.\tfrac{1}{2}\phi+Tang.\alpha(Cot^2.\tfrac{1}{2}\phi-1))(1-Tang.\tfrac{1}{2}\alpha T.\tfrac{1}{2}\phi)$$

$$= (1-Tang\tfrac{1}{2}\alpha Tang\,\tfrac{1}{2}\phi+Tang.\tfrac{1}{2}\alpha+Tang.\tfrac{1}{2}\phi)2Cot.\tfrac{1}{2}\phi.$$

Voor $Tang.\frac{1}{2}\phi$ ſchrijvende $\frac{1}{Cot.\frac{1}{2}\phi}$ en alles volgens de magten van $Cot.\frac{1}{2}\phi$ ontwikkelende, verkrijgt men eene vierde magtsvergelijking waaruit y gevonden kan worden, zoodra de gegevens in getallen bekend zijn. De hoek gevonden zijnde, zoo zijn de zijden AC en BC bekend uit de voorgaande vergelijkingen, en alsdan zijn er twee zijden met den ingeſloten hoek gevonden en de geheele driehoek is bekend.

CXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men de loodlijnen, welke uit de hoeken aan de bazis op de overſtaande zijden van eenen driehoek vallen, verlengt tot aan de lijn, welke door den tophoek evenwijdig aan de bazis getrokken wordt, zoo ontſtaan daardoor twee driehoeken ter wederzijden van den eerſten; zoo nu de ſtralen van de omgeſchreven cirkels de-

dezer twee laatſte driehoeken en den tophoek van den eerſten driehoek gegeven zijn, vraagt men dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, C. E. H. HOMBACH *en* J. JONKBERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laat wederom, in *Fig.* 48, ABC de gegeven driehoek zijn, waarin ED evenwijdig met AB, en AD en CE loodregt op BC en AB getrokken zijn, en nemen wij wederom $ABC = \alpha$, $CBD = \phi$. Omdat de hoeken BFD en EGB regt. zijn, worden BD en EB de middellijnen van de omgeſchrevene cirkels, wij ſtellen dan $BD = 2a$ en $EB = 2b$.

Wij hebben nu uit den driehoek BFD

$$BF = BD\,Cos.\,DBF = 2a\,Cos.\,\phi,$$

en uit EGB

$$BG = BE\,Cos.\,EBG = -2b\,Cos.(\alpha+\phi).$$

Verder uit ABF

$$AB = BF\,Sec.\,ABF = 2a\,Cos.\,\phi\,Sec.\,\alpha,$$

en uit CGB

$$BC = BG\,Sec.\,GBC = -2b\,Cos.(\alpha+\phi)\,Sec.\,\alpha.$$

Maar nu is ook uit den driehoek ABC

$$\frac{AB}{BC} = \frac{Sin.\,BCA}{Sin.\,BAC} = \frac{Sin.\,\phi}{Sin.(\alpha+\phi)};$$

terwijl uit de voorgaande vergelijkingen volgt

$$\frac{AB}{BC} = -\frac{a\,Cos.\,\phi}{b\,Cos.(\alpha+\phi)},$$

derhalve $$\frac{Sin.\,\phi}{Sin.(\alpha+\phi)} = -\frac{a}{b}\cdot\frac{Cos.\,\phi}{Cos.(\alpha+\phi)},$$

of $$Tang.\,\phi = -\frac{a}{b}\,Tang.(\alpha+\phi),$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{Tang.\,\alpha + Tang.\,\phi}{Tang.\,\alpha\,Tang.\,\phi - 1},$$

en $$Tang.\,\alpha\,Tang^2.\,\phi - Tang.\,\phi = \frac{a}{b}(Tang.\,\alpha + Tang.\,\phi),$$

of $$Tang^2.\,\phi - (1+\frac{a}{b})\,Cot.\,\alpha\,Tang.\,\phi = \frac{a}{b},$$

dus $Tang\ \varphi = \frac{1}{2}(1+\frac{a}{b})\ Cot.\ \alpha + \sqrt{(\frac{a}{b}+\frac{1}{4}(1+\frac{a}{b})^2\ Cot^2.\ \alpha)}$.

De hoek φ bekend zijnde, zoo zijn wederom, even als in het voorgaande voorſtel, al de overige deelen van den driehoek gemakkelijk te vinden.

CXVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar twee driehoekige getallen van welke de ſom een vierkant en het verſchil eene derde magt zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. JONKHERT, G. BRANDSTEDER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten de wortels de twee getallen zijn $x+y$ en $x-y$, dan zijn de getallen

$$\frac{(x+y)^2+x+y}{2} \text{ en } \frac{(x-y)^2+(x-y)}{2},$$

en alsdan zal volgens het voorſtel

$$\frac{(x+y)^2+x+y}{2}+\frac{(x-y)^2+(x-y)}{2}=n^3,$$

en

$$\frac{(x+y)^2+x+y}{2}-\frac{(x-y)^2+(x-y)}{2}=m^3$$

moeten zijn. Deze twee vergelijkingen gaan door herleiding over in

$$x^2+y^2+x=n^3,$$

en

$$2xy+y=m^3.$$

Stelt men nu $x=2xy$,

dan is $x+y=n$,

en de tweede vergelijking verandert in

$$x+y=m^3,$$

of daar $2y=1$

is, zoo wordt $x=m^3-\frac{1}{2}$.

Zoodra men dus voor m een willekeurig getal neemt zal aan het vraagſtuk voldaan worden. Voor $m=2$ is $x=7\frac{1}{2}$, de wortels der getallen zijn dus 7 en 8; alzoo de getallen 28 en 36.

CXVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar twee getallen wier verſchil en product kwadraten zijn?

OP-

OPGELOST *door* J. BASSAN; C. E. H. HOMBACH, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK, G. BRANDSTEDER *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten de twee getallen zijn x en y; en ſtelle

$$x-y=p^2,$$

en dus $$x=p^2+y,$$

derhalve $$xy=y(p^2+y),$$

Het laatſte lid wordt een vierkant door te ſtellen

$$y(p^2+y)=q^2y^2,$$

of $$q^2y=p^2+y,$$

dus $$y=\frac{p^2}{q^2-1},$$

alsdan is $$x=p^2+\frac{p^2}{q^2-1}=p^2\frac{q^2}{q^2-1}.$$

Neemende, bij voorbeeld, $q=2$ en $p=3$, dan wordt $x=12$ en $y=3$.

CXIX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eene meetkunſtige reeks van vier termen zijn de ſommen der twee eerſten, die der twee laatſten en de geheele reeks vierkanten; welke is die reeks?

OPGELOST *door* J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laat de reeks zijn

$$x,\ xy,\ xy^2 \text{ en } xy^3,$$

dan moeten

$$x(1+y),\ xy^2(1+y),$$

en $$x(1+y+y^2+y^3)=x(y+1)(y^2+1)$$

vierkanten zijn. Wij ſtellen daartoe

$$y^2+1=(y-p)^2,$$

waaruit volgt $$1=-2py+p^2,$$

of $$y=\frac{p^2-1}{2p}.$$

Verder ſtellen wij $$x=p^2(1+y),$$

hetwelk door de waarde van y verandert in

$$x = p^2 \frac{p^2+2p-1}{2p}{}^2.$$

en waardoor nu aan al de voorwaarden voldaan wordt.

Stellende $p=2$, zoo wordt $y=\frac{3}{4}$ en $x=7$, de reeks is

$$7,\ \tfrac{21}{4},\ \tfrac{63}{16}\text{ en }\tfrac{189}{64}.$$

CXX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eene rekenkunstige reeks van 5 termen zijn de sommen der drie eerste, der drie middelste en der drie laatste vierkanten, welke is die reeks?

OPGELOST *door* J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, J. JONKHERT en W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel voor de reeks

$$3p^2-y,\ 3p^2,\ 3p^2+y,\ 3p^2+2y \text{ en } 3p^2+3y,$$

dan is de som der drie eerste termen $9p^2$, en voldoet dus aan het vraagstuk; de som der drie middelste $9p^2+3y$ en der drie laatste $9p^2+6y$ moet dan nog tot een vierkant gebragt worden; en daartoe stellen wij

$$9p^2+3y=(3p-qy)^2,$$

waaruit volgt $3y=-6pqy+q^2y^2,$

of $3=-6pq+q^2y,$

en $$y=3\frac{1+2pq}{q^2}.$$

Hierdoor wordt

$$9p^2+6y=9p^2+18\frac{1+2pq}{q^2}$$

$$=9\frac{p^2q^2+4pq+2}{q^2}.$$

De teller dezer breuk moet nu een vierkant worden, en daarvoor nemen wij

$$p^2q^2+4pq+2=(pq-r)^2$$

$$=p^2q^2-2pqr+r^2,$$

en dus $$4pq+2=r^2-2pqr,$$

of $$pq=\frac{r^2-2}{2(r+2)}.$$

Ne-

Nemende nu $r=2$ dan is $pq=\frac{1}{4}$, en nemende verder $p=q=\frac{1}{2}$ dan is de reeks

$$-17\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ 18\frac{3}{4},\ 36\frac{3}{4} \text{ en } 54\frac{3}{4}.$$

CXXI. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

Vijf kooplieden G, H, B, S *en* K, *hebben te zamen zoo veel dukaten uitgelegd als* $\sqrt[3]{6229504}$ *vermeerderd met* 1796 *en met het vierkant van* $8\frac{1}{20}$ *bedraagt, bovendien zijn de aandeelen van* G, H *en* B *gelijk aan den ganschen inleg min* 1130, *die van* H, B, *en* S *gelijk aan dezelfde som min* 1225, *die van* B, S *en* G *gelijk aan die zelfde som min* 1214, *en eindelijk de aandeelen van* H, G *en* S *gelijk aan die zelfde som min* 1146; *men vraagt naar ieders aandeel?*

OPGELOST *door* C. VAN SCHAICK, G. BRANDSTEDER, J. BASSAN, C. E. H. HOMBACH, J. JONKHEBT *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* C. VAN SCHAICK.

Ingevolge het voorstel hebben wij vooreerst, door den inleg der kooplieden, door g, h, b, s en k voor te stellen

$$g+h+b+s+k=\sqrt[3]{6229504}+(8\tfrac{1}{20})^2+1796$$
$$=184+1280+1766$$
$$=3260 \ldots\ldots\ldots (1),$$

en hieruit volgt, door de overige voorwaarden van het vraagstuk,

$$g+h+b=3260-1130=2130 \ldots (2),$$
$$h+b+s=3260-1225=2035 \ldots (3),$$
$$b+s+g=3260-1214=2046 \ldots (4),$$

en $$g+h+s=3260-1146=2114 \ldots (5),$$

waarvan de som is

$$3g+3h+3b+3s=8325$$

of $$g+h+b+s=2775 \ldots (6),$$

hetwelk afgetrokken van

$$g+h+b+s+k=3260 \ldots (1),$$

geeft $$k=485,$$

en van dezelfde vergelijking (6) aftrekkende (2), blijft er

$$s=645,$$

aftrekkende (3) komt er $g=740$,
aftrekkende (4) komt er $h=729$,
en aftrekkende (5) $b=661$.

CXXII. VOORSTEL.

Door J. C. VAN SETTEN.

Iemand is ſchuldig 1261 *guldens, te betalen over drie jaren; hij betaalt in elk der drie eerſtkomende jaren* 400 *gulden, en daarmede de ſchuld vereffend zijnde, vraagt men den interest welke hierbij is onderſteld geworden?* (*)

OPGELOST *door* J. C. VAN SETTEN, G. BRANDSTEDER, J. JONKHERT *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. C. VAN SETTEN.

Ingevolge het voorſtel zal de interest op interest van 400 gulden in twee jaren, en de interest van 400 gulden in één jaar moeten bedragen $1261 - 1200 = 61$. Stel dan den jaarlijkſchen interest x ten honderd, dan hebben wij voor den interest van 400 in een jaar $4x$, en de interest van $400 + 4x$ in het volgende jaar $\frac{400+4x}{100}x$

zoodat nu $8x + 4x + \frac{1}{25}x^2 = 61$

moet zijn, of $x^2 + 300x = 1525$,

waaruit volgt $x = -150 \pm \sqrt{(1525 + 150^2)}$

$= -150 \pm 155$,

waarvan de poſitieve wortel $x = 5$ aanwijst, dat de interest tegen vijf ten honderd is gerekend.

CXXIII. VOORSTEL.

Door J. C. VAN SETTEN.

Een kapitaal van 2521 *guldens moet benevens den interest van* 5 *percent in drie jaren worden afgelost, zoodanig, dat ieder jaar evenveel kapitaal en interest te zamen genomen, afgedaan worde. Men vraagt hoe veel in elk jaar betaald moet worden?* (†)

OPGELOST *door* J. C. VAN SETTEN, J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, J. JONKHERT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. C. VAN SETTEN.

De jaarlijkſche afloſſing x zijnde, en de interest van het geheele kapitaal in het eerſte jaar $\frac{2520}{20}$ bedragende, zoo is het af-

(*) PRINSEN, *Algebra*, Voorſtel 59. O. S. BANGMA, p. 95, N°. 17.

(†) PRINSEN, *Algebra*, p. 97, N°. 17.

afgeloste kapitaal

$$x - \frac{2522}{20},$$

de interest van het overblijvende bedraagt

$$\frac{2522}{20} - \left(\frac{x}{20} - \frac{2522}{400}\right),$$

alzoo is er bij het einde van het tweede jaar aan kapitaal afgelost

$$x - \frac{2522}{20} + \frac{x}{20} - \frac{2522}{400},$$

Het overblijvende kapitaal is dus

$$2522 - 2x + \frac{2522}{10} - \frac{x}{20} + \frac{2522}{400}.$$

Dit kapitaal met den interest van één jaar moet alzoo juist $= x$ zijn, en wij hebben dus de vergelijking

$$\frac{21}{20}\left(2522 - 2x + 252{,}2 - \frac{x}{20} + 6{,}305\right) = x,$$

waaruit men vindt $1261x = 1167814{,}1$,

en dus $x = 962{,}1$ gulden.

CXXIV. VOORSTEL.

Door J. C. VAN SETTEN.

Twee getallen te vinden, welke de eigenschappen hebben dat het vierkant van het grootste vermindert met het kleinste 421 overlaat, en dat de som van het grootste met het vierkant van het kleinste mede 421 oplevert?

OPGELOST *door* J. C. VAN SETTEN, J. BASSAN, J. JONKHERT, C. E. H. HOMBACH, G. BRANDSTEDER, C. VAN SCHAICK, G. GRAAFLAND, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* M. G. SNOEK.

OPLOSSING *van* J. C. VAN SETTEN.

Indien de getallen zijn x en y, dan geeft het voorstel de vergelijkingen

$$x^2 - y = 421,$$

en

$$y^2 + x = 421,$$

waarvan het verschil is

$$x^2 - y^2 - (x + y) = 0;$$

deze vergelijking deelbaar zijnde door $x + y$, geeft na de deeling

$$x - y - 1 = 0,$$

of

$$x - y = 1.$$

De-

Deze vergelijking afgetrokken van de tweede geeft

$$y^2+y=420,$$

en dus

$$y=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1681}{4}}$$

$$=-\tfrac{1}{2}\pm\frac{41}{2},$$

de wortels zijn dus 20 en -21.

Hierdoor wordt in de eerste vergelijking

$$x^2=421+20=441,$$

of

$$x^2=421-21=400.$$

De eerste geeft $x=21$ en de tweede 20. Men vindt alzoo de getallen 20, 21 of -21 en 20 voor de waarden die aan de vraag voldoen.

CXXV. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De inhoud benevens de bazis en de som der twee opstaande zijden van eenen driehoek gegeven zijnde, vraagt men den driehoek en deszelfs omgeschreven cirkel te berekenen?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. N. CALTEN, J. BASSAN, J. JONKHERT *en* M. G. SNOER.

I. OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Stel de som der opstaande zijden $=b$, de bazis $=a$, de opstaande zijden $=x$ en den inhoud $=I$. Dan hebben wij voor de derde zijde $b-x$, en door de bekende formule voor den inhoud

$$I^2=s(s-a)(s-x)(s-b+x),$$

waarin

$$s=\tfrac{1}{2}(a+b)$$

is, de vergelijking

$$16I^2=(a+b)(b-a)(a+b-2x)(a-b+2x),$$

of

$$16I^2=(b^2-a^2)(a^2-b^2+4xb-4x^2),$$

derhalve

$$\frac{16I^2}{b^2-a^2}-a^2+b^2=4xb-4x^2,$$

waaruit dadelijk volgt

$$x=\tfrac{1}{2}b\pm\sqrt{\left\{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{4I^2}{a^2-b^2}\right\}}.$$

De derde zijde gevonden zijnde is alzoo de geheele driehoek bekend.

Vol-

Volgens eene bekende eigenſchap is de ſtraal r van den omgeſchreven cirkel gelijk aan het product der zijden gedeeld door viermaal den inhoud, derhalve

$$r = \frac{a \cdot x(b-x)}{4\,\mathrm{I}} = \frac{a}{16\,\mathrm{I}} \cdot 2x(2b-2x),$$

$$= \frac{a}{16\,\mathrm{I}} \left\{ b \pm 2\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{4\,\mathrm{I}^2}{a^2-b^2}\right)} \right\} \left\{ b \mp 2\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{4\,\mathrm{I}^2}{a^2-b^2}\right)} \right\},$$

$$= \frac{a}{16\,\mathrm{I}} \left\{ b^2 - a^2 - \frac{16\,\mathrm{I}^2}{a^2-b^2} \right\}.$$

II Oplossing van J. N. Calten.

Het is duidelijk dat al de driehoeken, welke dezelfde bazis en dezelfde ſom van de opſtaande zijden hebben, gelegen zijn in den omtrek eener ellips, welke de ſom der opſtaande zijden tot groote as, en de bazis van den driehoek voor den afſtand der brandpunten heeft. Het zal er dan ſlechts op aan komen in den aldus bepaalde ellips zulk eenen driehoek te conſtrueren, welke eenen gegeven inhoud heeft. Stellende dan de bazis van den driehoek $= 2c$ en de ſom der opſtaande zijden $2a$. Dan is de vergelijking der ellips op derzelver middelpunt

$$y^2 = \frac{a^2-e^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

en daar de inhoud van den driehoek blijkbaar is ey, zoo hebben wij

$$e^2y^2 = \mathrm{I}^2 = \frac{a^2-e^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

waaruit volgt $a^2\mathrm{I}^2 = (a^2-e^2)\,a^2 - x^2(a^2-e^2)$,

of $$x = \pm\sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2\mathrm{I}^2}{a^2-e^2}\right)},$$

voor den afſtand van den voet der loodlijn tot het midden der bazis. Het dubbelde teeken toont dat er twee driehoeken aan de vraag voldoen; die echter alleen in ſchijn van elkander verſchillen, zijnde de eene ter regterzijde hetgeen de andere aan de linkerzijde is. De loodlijn is blijkbaar $= \frac{\mathrm{I}}{e}$. Indien de waarde van

$$1 - \frac{\mathrm{I}^2}{a^2-e^2}$$

negatief is, dan is het voorſtel onmogelijk, dat is, zoodra

$$\mathrm{I}^2 > a^2 - e^2.$$

Voor

Voor $l^2 = a^2 - e^2$,

is $x = 0$ of de driehoek gelijkbeenig. De straal van den omgeschreven cirkel wordt even als in de voorgaande oplossing gevonden; terwijl het niet moeijelijk is in te zien, dat beide oplossingen dezelfde uitkomsten geven.

CXXVI. VOORSTEL.

Door J. N. CALTEN.

Van eene paraboöl de parameter gegeven zijnde, zoo vraagt men den inhoud te vinden van het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van het vlak tusschen de paraboöl en hare ontwikkelende kromme gelegen, om de as der paraboöl?

OPGELOST *door* J. N. CALTEN, J. DOORMAN *en* J. JONKBERT.

OPLOSSING *van* J. N. CALTEN.

Zij, in *Fig.* 49, ABG de parabool, EH derzelver as en CDG de ontwikkelende kromme; stellen wij verder de vergelijking der parabool te zijn $y^2 = px$, en de abcissen en ordinaten der ontwikkelende kromme α en β, dan heeft men, ter bepaling van de ontwikkelende kromme, de vergelijkingen

$$\alpha = x - \frac{q(1+q^2)}{r},$$

en

$$\beta = y + \frac{1+q^2}{r}$$ (I. R. SCHMIDT, *Dif. Rek.* p. 207.)

waarin

$$q = \frac{\partial y}{\partial x},$$

en

$$r = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

is, en omdat nu hier

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y} = \frac{p}{2\sqrt{px}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}};$$

en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{p}{4\sqrt{px^3}};$$

alzoo

$$1 + q^2 = 1 + \tfrac{1}{4}\frac{p}{x},$$

en dus

$$\alpha = x + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}\,\frac{(1+\frac{1}{4}\frac{p}{x})4\sqrt{px^3}}{p};$$

=

$$=x+\tfrac{1}{3}(4x+p)=\frac{y^2}{p}+\tfrac{1}{3}(4\frac{y^2}{p}+p)=\frac{6y^2+p^2}{2p} \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\beta=y-\frac{(1+\frac{1}{4}\frac{p}{x_1})4\sqrt{px^2}}{p},$$

$$=y-\frac{(4x+p)}{\sqrt{p}}\sqrt{x},$$

$$=y-(4\frac{y^2}{p}+p)\frac{y}{p}=-4\frac{y^3}{p^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Uit (1) volgt $y^2=\frac{(2x-p)p}{6}$,

en uit (2) $\beta^2p^4=16y^6$,

en hierin de waarde van y^2 gebragt uit de voorgaande vergelijking, zoo komt er

$$\beta^2=\frac{2(2x-p)^3}{27p}.$$

Voor $x=\frac{1}{2}p$ is $\beta=o$, en derhalve is $BC=\frac{1}{2}p$, ſtelt men dan $x-\frac{1}{2}p=x'$, dan wordt de vergelijking der ontwikkelende kromme, C den oorſprong zijnde,

$$\beta^2=\frac{16x'^3}{27p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Hierdoor heeft men nu uit de algemeene formule voor den inhoud der omwentelingsligchamen, voor den inhoud van het omwentelingsligchaam CDGH

$$\pi\int y^2\partial x=\pi\int\beta^2\partial x',$$

$$=\pi\int\frac{16x'^3}{27p}\partial x',$$

$$=\frac{16}{27p}(\tfrac{1}{4}x'^4+C).$$

Voor $x'=o$, moet de inhoud verdwijnen, dus $C=o$, en ſtellende $CH=d$, zoo is de inhoud CDGH

$$=\frac{4}{27}\frac{d^4}{p}.$$

De inhoud van het omwentelingsligchaam door de paraboot voortgebragt is, gelijk bekend is,

$$\tfrac{1}{2}\pi d h^2,$$

$GH=h$ zijnde.

Der-

Derhalve wordt de inhoud door de omwenteling van het vlak BCDG voortgebragt

$$I = \pi \left\{ \tfrac{1}{3} h^2 d - \tfrac{4}{27} \frac{d^3}{p} \right\}.$$

Om nu de waarde van d en h te vinden, hebben wij flechts de vergelijking (3) der ontwikkelende met die der parabool te verbinden, door $a = x = d + \frac{1}{2}p$ en $\beta = y = h$ te nemen, wij hebben dan

$$h^2 = p(d + \tfrac{1}{2}p),$$

en

$$h^2 = \frac{16 d^3}{27 p}.$$

Door aftrekking heeft men terſtond

$$p(d + \tfrac{1}{2}p) = \frac{16 d^3}{27 p},$$

alzoo

$$27 p^2 (d + \tfrac{1}{2}p) = 16 d^3,$$

waaruit volgt

$$d^3 - \frac{27}{16} p^2 d - \frac{27}{32} p^3 = 0.$$

Deze vergelijking door den regel van CARDANUS opgelofte, komt er voor den wortel

$$d = \tfrac{3}{2}p,$$

en hierdoor wordt

$$h^2 = \frac{16}{27} \cdot \frac{27}{8} \cdot \frac{p^3}{p},$$

$$= 2p^2.$$

Deze waarde in de formule voor den inhoud geſteld geeft eindelijk

$$I = \pi \left\{ \tfrac{2}{3} \cdot 2p^2 \cdot \tfrac{3}{2}p - \tfrac{4}{27} \cdot \tfrac{81}{160} p^3 \right\},$$

$$= \pi p^3 (2 - \tfrac{3}{4}) = \tfrac{5}{4} \pi p^3.$$

CXXVII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Iemand koopt 100 *viſchen van drie onderſcheidene ſoorten voor* 100 *gulden, elke viſch der eerſte ſoort kost* 5 *gulden, van de tweede* 1 *gulden en van de derde* 1 *ſtuiver, hoe veel viſchen van elke ſoort kunnen er geweest zijn?*

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, G. BRANDSTEDER, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOER, G. GRAAFLAND, J. BASSAN, C. E. H. HOMBACH *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

La-

Laten er x visschen van de eerste en y van de tweede zijn, zoodat er $100 - x - y$ van de derde soort komen, dan geeft ons het voorstel de volgende vergelijking

$$5x + y + \tfrac{1}{20}(100 - x - y) = 100,$$

of $$100x + 20y + 100 - x - y = 2000,$$

of $$99x + 19y = 1900,$$

dus $$y = 100 - \tfrac{99}{19}x.$$

Zal dus y een geheel getal wezen, zoo moet de laatste term van het tweede lid dezer vergelijking mede een geheel getal zijn; en daar nu 99 en 19 geene gemeene deelers hebben, zoo moet voor x een veelvoud van 19 genomen worden. Doch zoodra men x grooter dan het eerste veelvoud van 19 neemt, wordt y negatief; derhalve kan men x alleen $= 19$ nemen; en hierdoor wordt dan $y = 1$ en het getal visschen van de eerste soort 19, van de tweede 1 en van de derde 80.

CXXVIII. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

Men vraagt den ligchamelijken inhoud te berekenen, welke twee bollen, wier straalen en stand gegeven zijn, met elkander gemeen hebben?

OPGELOST *door* J. W. MARTINI, J. DOORMAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Laat in *Fig.* 50, $F'CFC'$ en $C'CGH$ de doorsneden zijn van de beide bollen door een vlak gaande door de middelpunten derzelve. Men stelle verder $AC = r$, $BC = R$ en $AB = a$; dan zal men hebben

$$DC^2 = DF \times DF'$$
$$= DF(2r - DF)$$

en ook $$DC^2 = ED \times DE' = ED(2R - ED),$$

dus $$DF(2r - DF) = ED(2R - ED).$$

Maar nu is ook $$ED + DF = r + R - a,$$

en $$2r - DF = r - R + a + ED;$$

derhalve

$$(r + R - a - ED)(r - R + a + ED) = ED(2R - ED),$$

of $$r^2 - (R - a - ED)^2 = 2R \times ED - ED^2,$$

dus bij ontwikkeling $$ED = \frac{-R^2 + r^2 - a^2 + 2aR}{2a}.$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$DF = \frac{-r^2+R^2-a^2+2ar}{2a}.$$

Nu is $$2r-DF = \frac{2ar+r^2-R^2+a^2}{2a},$$

en hieruit volgt voor

$$DC^2 = DF(2r-DF)$$
$$= \frac{R^2-r^2-a^2+2ar}{2a} \times \frac{2ar+r^2-R^2+a^2}{2a}$$
$$= \frac{4a^2r^2-(R^2-r^2-a^2)^2}{4a^2}.$$

Nu is blijkbaar de gevraagde inhoud, gelijk aan de som der inhouden van de bolvormige segmenten ECDC′ en DCFC′, en nu is algemeen de inhoud van zulk eene schijf $\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$, waarin r de straal en h de hoogte van de schijf is, derhalve is hier

inhoud segt. $ECDC' = \frac{1}{3}\pi ED^2(\frac{1}{2}R-ED)$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{(-R^2+r^2-a^2+2aR)^2}{4a^2} \times \frac{4aR+R^2-r^2+a^2}{2a}$$
$$= \frac{1}{24a^3}\pi(4aR+R^2-r^2+a^2)(r^2-R^2-a^2+2aR)^2;$$

en voor

inhoud segt. $DCFC' = \frac{1}{3}\pi DF^2(3-DF)$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{(R^2-r^2-a^2+2ar)^2}{4a^2} \times \frac{4ar+r^2-R^2+a^2}{2a}$$
$$= \frac{\pi}{24a^3}(4ar+r^2-R^2+a^2)(R^2-r^2-a^2+2ar)^2.$$

Beide deze inhouden te zamen geven voor den gevraagden inhoud

$$I = \frac{\pi}{24a^3}\{(4aR+R^2-r^2+a^2)(r^2-R^2-a^2+2aR)^2$$
$$+(4ar+r^2-R^2+a^2)(R^2-r^2-a^2+2ar)^2\}.$$

Hetwelk herleid kan worden tot

$$I = \frac{\pi}{12a}\{a^4+8a(R^3+r^3)-6a^2(R^2+r^2)-3(R^2-r^2)^2\}.$$

Voor het geval dat de bollen even groot zijn, dat is, als $R = r$ is, komt er

$$I =$$

$$I = \frac{\pi}{12a}\{a^4 + 16ar^3 - 12a^2r^2\}$$

$$= \frac{\pi}{12}(a^3 + 16r^3 - 12ar^2).$$

Gaat een der bollen door het middelpunt van den anderen of is $r = a$, dan komt er

$$I = \frac{\pi}{12r}\{r^4 + 8r(R^3 + r^3) - 6r^2(R^2 + r^2) - 3(R^2 - r^2)^2\}$$

$$= \frac{\pi}{12r}(8rR^3 - 3R^4)$$

$$= \frac{\pi R^3}{12r}(8r - 3R).$$

Voor $R = r = a$ komt er

$$I = \tfrac{5}{12}\pi r^3.$$

CXXIX. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

Hoe groot moet de straal van eenen bol zijn, om, uit een bepaald middelpunt beschreven zijnde, door het oppervlak van eenen anderen gegevenen bol in twee gelijke deelen te kunnen verdeeld worden?

OPGELOST *door* J. W. MARTINI *en* J. JONBERT.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Laat wederom in *Fig.* 31 CFC'F' de doorsnede van den gegevenen bol met een plat vlak, gaande door deszelfs middelpunt en het gegevene punt B voorstellen; zij verder de straal AF van den gegevenen bol $= r$, die van den gezogten $= R$ en de afstand $AB = a$. Dan is het uit het voorgaande voorstel duidelijk, dat de inhoud, welke van den eenen bol door den anderen wordt afgesneden, uitgedrukt wordt door de formule

$$I = \frac{\pi}{12a}\{a^4 + 8a(R^3 + r^3) - 6a^2(R^2 + r^2) - 3(R^2 - r^2)^2\},$$

en dewijl dit nu de helft van den bol met den straal R beschreven zijn moet, hebben wij ter bepaling van R

$$\tfrac{2}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{12a}\{a^4 + 8a(R^3 + r^3) - 6a^2(R^2 + r^2) - 3(R^2 - r^2)^2\},$$

waaruit volgt

$$8aR^3 = a^4 + 8a(R^3 + r^3) - 6a^2(R^2 + r^2) - 3(R^2 - r^2)^2,$$

of $o = a^4 + 8ar^3 - 6a^2(R^2+r^2) - 3(R^2-a^2)^2$.

Deze vergelijking ten opzigte van R van de tweede magtsvorm zijnde, zoo vindt men door de gewone oplosſingswijze

$$R = \{r^2 - a^2 \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{(3a(a^3 - 3ar^2 + 2r^3))}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Uit deze waarde volgt, dat de vraag onmogelijk is, zoodra

$$2r^3 + a^3 < 3ar^2,$$

doch in het tegengeſtelde geval mogelijk is. Dit is echter niet de eenige voorwaarde, dewijl ook nu nog r^2 grooter zal moeten zijn dan het overige gedeelte der gevondene uitdrukking.

CXXX. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

Twee bollen ſnijden elkander, zoodanig, dat het oppervlak van den eerſten door het middelpunt van den anderen gaat; indien nu gegeven is de rede der ſtukken waarin de eerſte bol hierdoor verdeeld wordt, benevens zijne ſtraal, zoo vraagt men den ſtraal van den anderen bol?

OPGELOST *door* J. W. MARTINI *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Om herhalingen te vermijden zullen wij gebruik maken der uitkomsten in de oplosſingen der twee laatſte voorſtellen verkregen; in het 128ſte Voorſtel, namelijk, hebben wij voor den inhoud I van het gedeelte hetwelk twee bollen met de ſtralen R en r beſchreven, gemeen hebben, in de onderſtelling dat het middelpunt van den bol met den ſtraal R beſchreven, op den omtrek van den bol r gelegen was:

$$I = \frac{\pi R^3}{12r}(8r - 3R) = \pi(\tfrac{2}{3}R^3 - \tfrac{1}{4}\frac{R^4}{r}).$$

De geheele inhoud van den bol met R beſchreven is $\frac{4}{3}\pi R^3$, en hiervan I afgetrokken, komt er

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 - I = \pi(\tfrac{2}{3}\pi R^3 + \tfrac{1}{4}\frac{R^4}{r})$$

$$= \frac{\pi R^3}{12r}(8r + 3R).$$

Volgens het voorſtel is nu de betrekking

$$\frac{\pi R^3}{12r}(8r + 3R) : \frac{\pi R^3}{12r}(8r - 3R) = p : q,$$

ge-

gegeven, doch een der ſtralen r of R onbekend. Nu geeft de bovenſtaande evenredigheid na vereenvoudiging

$$8r+3R:8r-3R=p:q,$$

en dus $$R=\frac{8(p-q)}{3(p+q)}r,$$

of $$r=\frac{3(p+q)}{8(p-q)}R.$$

Waardoor nu het voorſtel opgelost is.

CXXXI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eene rekenkunstige reeks van vijf termen, zijn de ſommen der drie eerſten, die der drie middelſte en die der drie laatſte, vierkanten; men vraagt naar de reeks?

OPGELOST *door* J. N. CALTEN, J. BASSAN, H. STROOTMAN, W. A. FROGER, M. H. GODEFROI, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. JONKHERT, G. BRANDSTEDER, C. F. JULIUS *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. N. CALTEN.

Laat de reeks zijn

$$a,\ a+v,\ a+2v,\ a+3v \text{ en } a+4v,$$

en ſtel de ſom der drie eerſte termen

$$3(a+v)=z^2 \quad \ldots\ldots (1),$$

der drie middelſte

$$3(a+2v)=y^2 \quad \ldots\ldots (2),$$

en der drie laatſten

$$3(a+3v)=x^2 \quad \ldots\ldots (3).$$

Dan volgt door aftrekking uit de twee eerſte vergelijkingen

$$y^2-z^2=3v,$$

en uit de twee laatſten

$$x^2-y^2=3v,$$

derhalvé $$y^2-z^2=x^2-y^2,$$

of $$2y^2=z^2+x^2 \quad \ldots\ldots (4).$$

Stelt men nu $$z=m-n,$$

en $$x=m+n,$$

dan verandert de vergelijking (4) in

$$2y^2=2m^2+2n^2,$$

of $$y^2=m^2+n^2 \quad \ldots\ldots (5).$$

Nemende nu $m = t^2 - u^2$,
en $n = 2tu$,
dan wordt (5) $y^2 = (t^2 + u^2)^2$,
of $y = t^2 + u^2$.
Door deze zelfde waarde van m en n vindt men nu

$$z = m - n = t^2 - u^2 - 2tu,$$

en $$x = m + n = t^2 - u^2 + 2tu.$$

Hierdoor hebben wij dan uit (1) en (3)

$$3(a+v) = (t^2 - u^2 - 2tu)^2 \quad \ldots \quad (6),$$

en $$3(a+3v) = (t^2 + u^2 + 2tu)^2 \quad \ldots \quad (7).$$

Deze vergelijkingen aftrekkende, vindt men verder

$$6v = 4t^2u^2 + 8ut^3,$$

of $$3v = 2t^2u(u+2t) \quad \ldots \quad (8).$$

Voor de aftrekking de vergelijking (6) met 3 vermenigvuldigende, komt er

$$6a = 2t^4 + 2u^4 + 8t^2u^2 - 8t^3u - 16t^3u + 8tu^3,$$

of $$3a = t^4 + u^4 - 8t^3u + 4tu^3.$$

Indien men derhalve voor u en t veelvouden van drie neemt, zal het voorstel in geheele getallen opgelost zijn.

Neemt men bij voorbeeld, $t = 3$ en $u = 6$, zoo wordt

$$a = 1971 \text{ en } v = -648,$$

zoodat de reeks is

1971, 1323, 675, 27 en -621,

en werkelijk is de som der drie eerste termen 3969 of het vierkant van 63, de som der drie middelste termen 2025 of 45^2 en der drie laatste 81 of 9^2.

CXXXII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eene rekenkunstige reeks van acht termen zijn de sommen der twee eerste en die der twee laatste vierkanten en de vier middelste eene derde magt, men vraagt naar deze reeks?

OPGELOST *door* J. BASSAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, W. A. FROGER, C. F. JULIUS, M. H. GODEFROI, G. BRANDSTEDER, M. G. SNOER, J. JONKHERT *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel voor de termen der reeks

$$2x^3 - 7y,$$

$$2x^3-7y,\ 2x^3-5y,\ 2x^3-3y,$$
$$2x^3-y,\ 2x^3+y,\ 2x^3+3y,$$
$$2x^3+5y \text{ en } 2x^3+7y,$$

dan is reeds de ſom der vier middelſte eene derde magt, dewijl deze ſom is $8x^3$. Ingevolge het voorſtel moeten dan nu nog

$$4x^3-12y \text{ en } 4x^3+12y$$

rationale vierkanten zijn; daartoe ſtellen wij $y=px$, dan vindt men

$$4x^3-12y=4(x^3-3px^2)$$
$$=4x^2(x-3p),$$

en $4x^3+12y=4x^2(x+3p)$.

Nemende nu $x-3p=q^2$,

dan is $x=q^2+3p$,

en $x+3p=q^2+6p$.

Voor deze laatſte uitdrukking ſtellen wij verder

$$q^2+6p=(pr-q)^2,$$

dan volgt daaruit $6p=p^2r^2-2prq$,

of $6=pr^2-2rq$,

derhalve $q=\frac{pr^2-6}{2r}$.

Nemende nu $r=3$ en $p=2$, dan wordt

$$q=2,\ x=10 \text{ en } y=200,$$

waardoor de reeks wordt

600, 1000, 1400, 1800
2200, 2600, 3000, 3400.

CXXXIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eene rekenkunstige reeks van acht termen zijn de ſommen der twee eerſte en der twee laatſte derde magten, en de ſom der vier middelſte eene tweede magt, welke is de reeks?

OPGELOST *door* J. BASSAN, W. A. FROGER, M. H. GODEFROI, G. BRANDSTEDER, C. F. JULIUS, J. JONKHERT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stellende de reeks voor door

$$\tfrac{1}{2}x^3-y,\ \tfrac{1}{2}x^3+y,\ \tfrac{1}{2}x^3+3y,\ \tfrac{1}{2}x^3+5y,$$
$$\tfrac{1}{2}x^3+7y,\ \tfrac{1}{2}x^3+9y,\ \tfrac{1}{2}x^3+11y \text{ en } \tfrac{1}{2}x^3+13y,$$

dan is de ſom der twee eerſte termen reeds eene derde magt, derhalve moet dan nog $2x^3+24y$ eene tweede magt en x^3+24y eene derde magt zijn. Nu wordt x^3+24y eene derde magt door $24y=p^3x^3-x^3$ te ſtellen, waaruit volgt

$$y=\frac{x^3(p^3-1)}{24}.$$

Deze waarde verandert $2x^3+24y$ in

$$x^3+p^3x^3=x^3(1+p^3),$$

hetwelk een vierkant wordt, door te ſtellen

$$1+p^3=x.$$

Stelt men nu $p=2$ dan wordt $x=9$ en $y=\frac{1701}{8}$, en dus is de reeks

$$\frac{1215}{8},\ \frac{4617}{8},\ \frac{8019}{8},\ \frac{11421}{8},\ \frac{14823}{8},\ \frac{18225}{8},\ \frac{2\cdot627}{8}$$

en $\frac{25029}{8}$.

CXXXIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar eene meetkunstige reeks van acht termen zoodanig bepaald, dat de ſom der twee eerſte en der twee laatſte termen vierkanten, en der vier middelſte eene derde magt zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. JONKHERT, M. G. SNOER, C. VAN SCHAICK, C. F. JULIUS *en* W. A. ERGGER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel voor de reeks

$$x,\ xy,\ xy^2,\ xy^3\ \ldots\ xy^7,$$

dan moeten volgens het voorſtel

$$x+xy=x(1+y),$$

en $xy^6+xy^7=xy^6(1+y)$

vierkanten zijn, alsmede

$$xy^2+xy^3+xy^4+xy^5=xy^2(1+y^2)(1+y)$$

eene derde magt. Stelt men daartoe

$$x=p^2(1+y),$$

dan is aan de eerſte voorwaarde voldaan, en hierdoor wordt de ſom der vier middelſte termen

$$xy^2(1+y^2)(1+y)=y^2p\ (1+y)^2(1+y^2),$$

wel-

welke tot eene derde magt gebragt wordt door te ſtellen

$$1+y^2=yp(1+y),$$

waaruit volgt $$p=\frac{1+y^2}{y(1+y)},$$

en dus $$x=\frac{(1+y^2)^2}{y^2(1+y)}.$$

Zoo is dan voor $y=2$ $x=\frac{25}{4.3}=\frac{25}{12}$,

en derhalve de reeks

$$\frac{25}{12},\ \frac{50}{12},\ \frac{100}{12},\ \frac{200}{12},\ \frac{400}{12},\ \frac{800}{12},\ \frac{1600}{12} \text{ en } \frac{3200}{12}.$$

CXXXV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eene meetkunstige reeks van acht termen zijn de ſommen der twee eerſte en twee laatſte derde magten, en die der vier middelſte een vierkant; men vraagt naar deze reeks?

OPGELOST *door* J. BASSAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. JONKHERT, C. F. JULIUS, C. VAN SCHAICK *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Nemen wij wederom voor de reeks

$$x,\ xy,\ xy^2,\ \ldots\ xy^7,$$

dan moeten $$x+xy=x(1+y),$$

en $$xy^6(1+y)$$

derde magten, en

$$xy^3(1+y^3)(1+y)$$

een vierkant zijn.

Men ſtelle nu $$x(1+y)=p^3,$$

of $$x=\frac{p^3}{1+y},$$

dan worden de beide derde magten rationaal; de ſom der vier middelſte termen is dan

$$p^3(y^3+1)y^2=y^2p^3(y^2+1)p,$$

en hieris $$p=\frac{q^2}{y^2+1}$$

ſtellende, zoo wordt deze uitdrukking mede rationaal, terwijl wij alsdan vinden

$$x = \frac{q^6}{(y^2+1)^3(1+y)^3}$$

voor $y = 2$ is dus $x = \frac{q^6}{125.3}$,

némende dus $q = 15$, dan is $x = 5^3.3^3 = 20375$, en dus de reeks

20375, 40750, 81500, 163000, 326000, 652000, 1304000 en 2608000.

CXXXVI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt naar een getal dat zeven maal bij deszelfs vierkant opgeteld met de eenheid een vierkant zij?

OPGELOST *door* J. DOORMAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. N. CALTEN, H. STROOTMAN, M. DE LEON, M. H. GODEFROI, C. F. JULIUS, G. BRANDSTEDER, M. G. SNOER, W. A. FROGER, J. JONKHERT, C. VAN SCHAICK *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* J. DOORMAN.

Stel het gevraagde getal $= x$, dan zal, volgens het voorstel,

$$x^2+7x+1$$

een vierkant moeten zijn, en daartoe nemen wij

$$x^2+7x+1 = (x+z)^2,$$

waaruit volgt $7x+1 = 2xz+z^2$,

of $$x = \frac{z^2-1}{7-2z}.$$

Wil men nu voor x alleen geheele en positieve getallen hebben, dan kan men voor de positieve waarden van z niet anders dan de getallen 1, 2 of 3 nemen, en deze geven achtervolgens

$$x = 0, \quad x = 1 \text{ en } x = 8.$$

CXXXVII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Men vraagt naar een getal, hetwelk door 2, 3, 4, 5 en 6 gedeeld, altijd de eenheid tot rest overlaat, doch door 7 deelbaar zij?

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, C. F. JULIUS, H. STROOTMAN, J. N. CALTEN, M. G. SNOER, M. DE LEON, G. BRANDSTEDER, W. A. FROGER, J. BASSAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Stel

Stel het getal te zijn x, dan moet volgens het voorſtel

$$2n+1=x,$$
$$3m+1=x,$$
$$4p+1=x,$$
$$5q+1=x,$$
$$6r+1=x,$$

en $$7s=x.$$

Men zal dus hebben

$$2n=3m=4p=5q=6r.$$

Aan alle deze vergelijkingen zal voldaan worden, door voor een der factoren, n, m, *enz.* een getal te nemen, waarin de deelen 2, 3, 4, 5 en 6 deelbaar zijn, zoodat daar het kleinſte gemeene veelvoud dezer deelen 60 is, zoo zal voor een der getallen $2n$, $3m$, *enz.* een veelvoud van 60 nemende, bij voorbeeld, $60z$ aan de eerſte voorwaarden voldaan zijn; en daar ook nog uit de eerst geſtelde vergelijkingen volgt

$$7s=6r+1,$$

en dus $$7s=60z+1,$$

zoo is $$s=\frac{60z+1}{7}=8z+\frac{4z+1}{7};$$

en nemende nu $$4z+1=7y,$$

dan is $$z=\frac{7y-1}{4}=y+\frac{3y-1}{4},$$

en nemende $$3y-1=4w,$$

of $$y=w+\frac{w+1}{3},$$

en verder $$w+1=3v,$$

of $$w=3v-1.$$

Dewijl men nu voor v alleen geheele getallen mag nemen, zoo ſtelle men achtervolgens $v=1$, 2, 3, *enz.* en men zal vinden $w=2$, 5, 8, *enz.* zoodat de gevraagde getallen zijn

$$7s=7\left(8z+\frac{4z+1}{7}\right),$$
$$=7(15y-2),$$
$$=7(20w+3),$$

en dus $$x=301,\ 721,\ 1141,\ \text{enz.}$$

CXXXVIII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Men vraagt naar de waarde van u, x, y *en* z *uit de vergelijkingen* $xyz=24$, $uyz=60$, $xzu=40$ *en* $uxy=30$?

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, W. A. FROGER, H. STROOTMAN, J. N. CALTEN, J. DOORMAN, J. JONKHERT, M. G. SNOER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. F. JULIUS, C. VAN SCHAICK, G. GRAAFLAND, G. BRANDSTEDER, J. W. WINTER MOMMA, J. BASSAN, M. H. GODEFROI *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

De vergelijkingen zijn ingevolge het voorstel

$$xyz=24,\ yuz=60,\ xyu=30 \text{ en } xzu=40.$$

De eerste in al de overige deelende komt er

$$\frac{u}{x}=\frac{4}{5} \text{ of } x=\frac{5}{4}u,$$

$$\frac{u}{y}=\frac{1}{2} \text{ of } y=2u,$$

en

$$\frac{u}{z}=\frac{1}{3} \text{ of } z=3u,$$

waarvan het product is

$$xyz=\frac{24}{125}u^3.$$

Hetwelk, met de eerste vergelijking verbonden, geeft

$$24=\frac{24}{125}u^3,$$

of

$$u=5,$$

en hierdoor is dadelijk $x=2$, $y=4$ en $z=3$ gevonden.

CXXXIX. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt naar twee getallen, de eigenschap hebbende, dat als men hun verschil vermenigvuldigt met het verschil hunner vierkanten, het product 135 *zij, en zoo men hunne som vermenigvuldigt met de som hunner vierkanten, dit product* 1755 *zij?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. DOORMAN, J. N. CALTEN, H. STROOTMAN, M. H. GODEFROI, J. BASSAN, M. G. SNOER, J. W. WINTER MOMMA, J. JONKHERT, C. F. JULIUS, C. VAN SCHAICK, W. A. FROGER, G. GRAAFLAND, M. DE LEON *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Ingevolge het voorstel hebben wij, de twee getallen door x en y voorstellende,

$$(x^2-y^2)(x-y)=135 \quad \ldots\ldots (1),$$

en

$$(x^2+y^2)(x+y)=1755 \quad \ldots\ldots (2).$$

Voor de eerste vergelijking kan men schrijven

$$(x+y)(x-y)^2=135$$

hetwelk van de tweede afgetrokken er blijft

$$2xy(x+y)=1620 \quad \ldots\ldots (3),$$

en dit bij (2) geteld, geeft

$$(x+y)^3=3375,$$

of

$$x+y=15.$$

Hierdoor wordt (3)

$$(x-y)^2=9,$$

of

$$x-y=3,$$

en daar

$$x+y=15$$

is, zoo is

$$x=9 \text{ en } y=6.$$

CXL. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt naar twee getallen de eigenschap hebbende, dat hun verschil vermenigvuldigd met de som hunner vierkanten 267, *en dat het product hunner som met het verschil der vierkanten* 507 *zij?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. BASSAN, J. JONKHERT, M. H. GODEFROI, J. N. CALTEN, H. STROOTMAN, M. G. SNOER, C. F. JULIUS, C. VAN SCHAICK, W. A. FROGER, G. GRAAFLAND, J. W. WINTER MOMMA, M. DE LEON *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

De getallen wederom door x en y voorstellende, zoo geeft het voorstel de vergelijkingen

$$(x-y)(x^2+y^2)=267 \quad \ldots\ldots (1),$$

en

$$(x+y)(x^2-y^2)=507 \quad \ldots\ldots (2).$$

De laatste vergelijking aldus schrijvende

$$(x+y)^2(x-y)=507 \quad \ldots\ldots (3),$$

en hiervan de eerste aftrekkende blijft er

$$2xy(x-y)=240,$$

hetwelk wederom van (1) afgetrokken geeft

$$(x-y)^3=27,$$

en

en dus $x - y = 8 \ldots\ldots\ldots (4)$;
en hierdoor wordt (3)

$$(x+y)^2 = 169,$$

of $x+y = 13 \ldots\ldots\ldots (5)$;
en derhalve uit (4) en (5)

$$x = 8 \text{ en } y = 5.$$

CXLI. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt naar een getal van drie cijfers, zoodanig, dat het cijfer der eenheden een zevenhoekig getal, dat der tientallen een vijfhoekig en dat der honderdtallen een driehoekig getal zij; al de cijfers hebben denzelfden wortel en de som der vierkanten van de cijfers min één vormen een vijftienhoekig getal, welks wortel de helft van de som der cijfers van de tien- en honderdtallen is.

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. JONKHERT, J. DOORMAN, J. BASSAN, C. F. JULIUS, M. H. GODEFROI, H. STROOTMAN, M. G. SNOER, W. A. FROGER *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stellende den wortel van de figuurlijke getallen, of van de cijfers van het gevraagde getal $= x$, dan is het cijfer der eenheden

$$\frac{5x^2 - 3x}{2},$$

dat der tientallen

$$\frac{3x^2 - x}{2},$$

en dat der honderdtallen

$$\frac{x^2 + x}{2}.$$

Volgens de laatste voorwaarde van het voorstel moet nu

$$\left(\frac{5x^2 - 3x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x^2 - x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - 1$$
$$= \frac{x^2(x^2(15-2) - (15-4))}{2}$$
$$= \frac{x^2(13x^2 - 11)}{2},$$

of wel door $\frac{x^2}{4}$ deelende,

(5x

$$(5x-3)^2+(3x-1)^2+(x+1)^2-\frac{4}{x^2}=26x^2-22,$$

ontwikkelende

$$35x^2-34x+11-\frac{4}{x^2}=26x^2-22,$$

of met x^2 vermenigvuldigende

$$9x^4-34x^3-33x^2-4=0.$$

Deze vergelijking voldaan wordende voor $x=4$, zoo hebben wij dadelijk voor het cijfer der eenheden 7, voor dat der tientallen 5 en voor de honderdtallen 3, zoodat het begeerde getal is 357.

Aanmerking. Men had de oplossing van het vraagstuk ook kunnen afleiden uit de eigenschap, dat daar geen der cijfers van het gevraagde getal meer dan 9 mag bedragen, er geen vijf nog zevenhoekig getal minder dan 9 bestaat, wiens wortel grooter dan 2 is, en deze wortel aangenomen zijnde, is dan het getal dadelijk bekend.

CXLII. Voorstel.

Door G. Brandsteder.

Men vraagt naar een getal zoodanig bepaald, dat, zoo men het cijfer der eenheden als honderdtallen en dat der honderdtallen als eenheden beschouwt, men een vierkant verkrijgt, welks wortel gelijk is aan het product dezer twee cijfers. De som van viermaal het cijfer der eenheden en vijfmaal dat der honderdtallen is gelijk aan zesmaal dat der tientallen. Eindelijk, zoo men het cijfer der eenheden als tientallen en dat der tientallen als eenheden aanmerkt, dan is het door deze verplaatsing ontstane getal van drie cijfers, negen meer dan het vier en twintig hoekig getal, welks wortel het cijfer der eenheden is?

Opgelost *door* G. Brandsteder, J. Jonkhert, J. Bassan, C. F. Julius, W. A. Frogge *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* G. Brandsteder.

De eenheden door z, de tientallen door y en de honderdtallen door x voorstellende, zoo geeft het voorstel de drie vergelijkingen

$$100z+10y+x=x^2z^2 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$4z+5x=6y \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

en

en $100x+10z+y-9=11z^2-10z \ldots (3)$.

Uit de laatste vergelijking volgt dadelijk

$$y=11z^2-20z-100x+9.$$

Hetwelk in (1) en (2) gesteld geeft

$$x^2z^2+999x=110z^2-100z+99,$$

en $$605x=66z^2-124z+54,$$

waaruit komt $$x=\frac{66z^2-124z+54}{605} \ldots (4),$$

hetwelk in de voorlaatste vergelijking gesteld, na behoorlijke ontwikkeling, geeft

$$4356z^6-16368z^5+22504z^4-13392z^3$$
$$-369764z^2-3834480z-304920=0,$$

of al de termen door 4 deelende

$$1089z^6-4092z^5+5626z^4-3348z^3$$
$$-92441z^2-958562z-76230=0.$$

Aan deze vergelijking wordt door $z=6$ voldaan, en alsdan wordt uit (4) $x=4$ en alzoo $y=8$; het gevraagde getal is dus 487.

CXLIII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Een' vader naar den ouderdom zijner beide zonen gevraagt zijnde, antwoordde, indien ik de jaren des jongsten met die des oudsten vermenigvuldig, en bij dit product het vierkant der jaren des eerstgenoemden min 9 voeg, dan is deze som een vijfhoekig getal, welks wortel de helft hunner jaren is, doch zoo ik de som hunner jaren vermenigvuldig met hun verschil, dan krijg ik een pronikgetal waarvan de wortel een meerder is dan de ouderdom des jongsten. Men vraagt naar elks ouderdom?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. BASSAN, C. F. JULIUS, W. A. FROGER, J. JONKHERT, M. G. SNOER, C. F. JULIUS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stellen wij voor den ouderdom van den jongsten zoon x en voor den oudsten y, dan geeft het voorstel de volgende vergelijkingen

$$xy+x^2-9=\tfrac{1}{2}\left\{3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\frac{(x+y)}{2}\right\} \ldots (1),$$

en $$y^2-x^2=(x+1)^2+x+1 \ldots (2).$$

De-

Deze laatste vergelijking geeft dadelijk

$$y^2 = 2x^2 + 3x + 2,$$

of $$y = \sqrt{(2x^2 + 3x + 2)}.$$

De vergelijking (1) ontwikkeld zijnde, geeft

$$8xy + 8x^2 - 72 = 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x - 2y,$$

of $$5x^2 + 2xy - 3y^2 + 2x + 2y - 72 = 0.$$

Hierin voor y zijne waarde gesteld komt er

$$5x^2 - 3(2x^2 + 3x + 2) + 2x - 72 = 2y(x + 1),$$

of $$-x^2 - 7x - 78 = 2(x + 1)\sqrt{(2x^2 + 3x + 2)};$$

waarvan het vierkant is

$$x^4 + 14x^3 + 205x^2 + 1092x + 6084$$
$$= 8x^4 + 28x^3 + 40x^2 + 28x + 8,$$

of na herleiding

$$7x^4 + 14x^3 - 165x^2 - 1064x - 6076 = 0,$$

waarvan de eenige positieve wortel is $x = 7$. Hierdoor wordt dan $y = \sqrt{121} = 11$, zoodat de jongste zoon 7 en de oudste 11 jaren oud was.

CXLIV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

De tegenwoordige ouderdom mijner beide dochters is zoodanig, dat de som van het dubbeld product hunner jaren en $\frac{2}{3}$ maal derzelver som een driehoekig getal oplevert, welks wortel de som hunner jaren is, en als men de kwadraten hunner jaren van elkander aftrekt, brengt deze rest wederom een kwadraat voort, waarvan de wortel $\frac{1}{3}$ van de som hunner jaren is. Men vraagt naar ieders ouderdom?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. N. CALTEN, J. DOORMAN, H. STROOTMAN, M. H. GODEFROI, J. BASSAN, C. F. JULIUS, J. JONKMERT, J. W. WINTER MOMMA, W. A. FROGER, M. G. SNOER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stel den ouderdom van de oudste dochter $= x$ en van de jongste $= y$, dan geeft het voorstel de twee vergelijkingen

$$2xy + \tfrac{2}{3}(x + y) = \tfrac{1}{3}(x + y)^2 + x + y \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

en $$x^2 - y^2 = \tfrac{1}{3}(x + y)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

De beide leden der tweede vergelijking door $x + y$ deelende, komt er

$$9(x-y)=(x+y).$$

Voor $x+y$ zijne waarde in (1) gesteld, zoo komt er

$$2xy+6(x-y)=\tfrac{1}{4}\{81(x-y)^2+9(x-y)\},$$

of $$4xy+3(x-y)=81(x-y)^2$$
$$=(x+y)^2,$$

of ook $$3(x-y)=(x-y)^2;$$

alzoo $$x-y=3,$$

en dus $$9(x-y)=27=x+y,$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$x=15 \text{ en } y=12.$$

CXLV. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Als men de hoeken, welke de twee verlengden van de twee aan twee tegen over elkander liggende zijden van eenen vierhoek in eenen cirkel beschreven, midden door deelt, dan zullen deze lijnen regthoekig op elkander staan. Men vraagt naar het bewijs?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, H. STROOTMAN, W. A. FROGER, J. DOORMAN, J. N. CALTEN, C. F. JULIUS, J. BASSAN *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Zij ABCD (*Fig.* 52) de vierhoek in den cirkel beschreven, de zijden verlengd zijnde, worden de hoeken DEC en BFC gevormd, welke door de lijnen EH en FI midden door gedeeld worden.

Volgens LACROIX (*Meetkunst*, vertaald door I. R. SCHMIDT, § 136) mag men stellen

$$\textit{hoek}\,\mathrm{DEH}=\frac{\textit{boog}\,\mathrm{DH}-\textit{boog}\,\mathrm{AK}}{2},$$

en $$\textit{hoek}\,\mathrm{HEC}=\frac{\textit{boog}\,\mathrm{HC}-\textit{boog}\,\mathrm{BK}}{2},$$

derhalve daar $\textit{hoek}\,\mathrm{DEH}=\textit{hoek}\,\mathrm{HEC}$ is,

$$\textit{boog}\,\mathrm{DH}-\textit{boog}\,\mathrm{AK}=\textit{boog}\,\mathrm{HC}-\textit{boog}\,\mathrm{BK}.$$

Op dezelfde wijze hebben wij

$$\textit{boog}\,\mathrm{BI}-\textit{boog}\,\mathrm{AL}=\textit{boog}\,\mathrm{IC}-\textit{boog}\,\mathrm{DL}.$$

Deze vergelijking bij de voorgaande geteld, geeft

$$\textit{boog}\,\mathrm{DH}+\textit{boog}\,\mathrm{BI}-\textit{boog}\,\mathrm{KL}=\textit{boog}\,\mathrm{HI}-\textit{boog}\,\mathrm{BK}-\textit{boog}\,\mathrm{DL},$$

waar-

waaruit volgt

$boog(DH+DL)+boog(BI+KB)=boog\,HI+boog\,KL$,

of $boog\,HL+boog\,KI=boog\,HI+boog\,KL$,

en daar de vier bogen dezer laatſte vergelijking den geheelen omtrek vormen, zoo vormen de bogen HL + KI of HI + LK den halven omtrek, en dus wordt de hoek HGI gemeten door de helft van de ſom der bogen HI + LK of door een vierde van den omtrek, deze hoek is dan regt.

CXLVI. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Men vraagt den boog eens grooten cirkels te bepalen, die het midden der zijden van eenen gegeven bolvormigen vierhoek vereenigt?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, J. BASSAN *en* J. N. CALTEN.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Laat ABCD (*Fig.* 53) de gegevene vierhoek zijn, waarin FE en GH de zijden midden door deelen. Men ſtelle verder $AB=a$, $AC=b$, $DC=c$, $BD=d$, *hoek* $BAC=\alpha$ en *hoek* $ABD=\beta$, eindelijk trekke men nog den boog van eenen grooten cirkel door de punten E en B, ſtellende *hoek* $EBF=\phi$. Alsdan heeft men uit den driehoek BAE

$$Cos.BE=Cos.a\,Sin.a\,Sin.\tfrac{1}{2}b+Cos.a\,Cos.\tfrac{1}{2}b \quad . \quad (1),$$

en $$Sin.BE:Sin.\tfrac{1}{2}b=Sin.\alpha:Sin.(\beta-\phi),$$

of $$Sin.(\beta-\phi)=\frac{Sin.\alpha\,Sin.\tfrac{1}{2}b}{Sin.BE} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Uit den driehoek EBF heeft men nu

$$Cos.EF=Cos.\phi\,Sin.BE\,Sin.\tfrac{1}{2}d+Cos.BE\,Cos.\tfrac{1}{2}d$$

$$=Cos.\phi\,Sin.\tfrac{1}{2}d\,Sin.BE+Cos.\tfrac{1}{2}d(Cos.a\,Sin.a\,Sin.\tfrac{1}{2}b+Cos.a\,Cos.\tfrac{1}{2}b) \quad (3).$$

De vergelijking (1) nu de waarde van BE en alsdan (2) die van ϕ gevende, zoo blijkt hieruit, hoe uit (3) de waarde van FE gevonden kan worden. Men kan echter ook nog in (3) uit (2) de waarde van *Sin.* BE ſchrijven, en alsdan komt er

$$Cos.EF=\frac{Cos.\phi}{Cos.(\beta-\phi)}\,Sin.\tfrac{1}{2}d\,Sin.a\,Sin.\tfrac{1}{2}b+ \quad . \quad . \quad .$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}d(Cos.a\,Sin.a\,Sin.\tfrac{1}{2}b+Cos.a\,Cos.\tfrac{1}{2}b),$$

waarin nu ϕ door de vergelijkingen (1) en (2) gevonden wordt. De zijde GH wordt volkomen op dezelfde wijze gevonden.

CXLVII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt naar twee getallen van de volgende eigenſchap, het dubbeld product is gelijk aan de pentagonaal van het grootſte, en het verſchil tuſſchen de heptagonaal van het grootſte en het tienhoekige getal van het kleinſte is gelijk aan 2½ *maal de ſom der getallen?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J BASSAN, H. STROOTMAN, J N. CALTEN, J. JONKHERT, W. A. FROGER, M. H. GODEFROI, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. F. JULIUS, M. G. SNOER *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stellende voor de gevraagde getallen x en y, dan geeft het voorſtel de twee vergelijkingen

$$2xy = \tfrac{1}{2}(3x-1)x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

en

$$\frac{x(5x-3)}{2} - y(4y-3) = \frac{9(x+y)}{4} \quad . \quad (2).$$

Uit (1) volgt dadelijk

$$4y = 3x-1,$$

of

$$y = \frac{3x-1}{4}.$$

De vergelijking (2) wordt herleid tot

$$8x(5x-3) - 4y(4y-3) = 9(x+y),$$

of tot

$$10x^2 - 15x - 16y^2 + 3y = 0.$$

En hierin voor y zijne waarde ſtellende, komt er

$$10x^2 - 15x - (3x-1)^2 + \tfrac{3}{4}(3x-1) = 0,$$

of

$$x^2 - \tfrac{27}{4}x - \tfrac{7}{4} = 0,$$

waaruit volgt

$$x = \tfrac{27}{8} \pm \sqrt{(\tfrac{7}{4} + \tfrac{729}{64})}$$
$$= \tfrac{27}{8} \pm \tfrac{29}{8}.$$

De wortels dezer vergelijking zijn dus 7 en $-\frac{1}{4}$. Gebruikende alleen den poſitieven wortel zoo vindt men $y = 5$.

CXLVIII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Van eenen regthoekigen driehoek is het verſchil der zesde en derdemagten van het product der zijden 46655784000, *en het product der kwadraten van de kleinſte regthoekszijde en de hypothenuſa is gelijk aan* 14 *maal het vierkant der andere regthoekzijde plus één. Men vraagt naar de zijden?*

OP-

Opgelost door G. Brandsteder, C. F. Julius, M. H. Godefroi, J. Jonkhert, J. N. Calten, H. Strootman, C. van Schaick, M. G. Snoer, W. A. Froger, J. Bassan, M. de Leon en W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing van G. Brandsteder.

Nemen wij voor de drie zijden van den driehoek, x, y en z, dan hebben wij, naar aanleiding van het voorstel, de vergelijkingen

$$x^2+y^2=z^2, \quad 14x^2+1=y^2z^2$$

en $$x^6y^6z^6-x^3y^3z^3=46655784000.$$

Deze laatste vergelijking als eene tweede magtsvergelijking behandelende, komt er

$$x^3y^3z^3=\tfrac{1}{2}\pm 215999\tfrac{1}{2},$$

en alleen den positieven wortel gebruikende

$$x^3y^3z^3=216000,$$

en dus $$xyz=60.$$

Uit de tweede der gegevene vergelijkingen volgt door de vermenigvuldiging met x^2

$$14x^4+x^2=y^2z^2x^2,$$

en dus $$14x^4+x^2=3600.$$

Deze vergelijking wederom als eene tweede magtsvergelijking behandelende, komt er

$$x^2=-\tfrac{1}{28}\pm\sqrt{(\tfrac{1800}{7}+\tfrac{1}{784})}$$
$$=-\tfrac{1}{28}\pm\tfrac{449}{28}.$$

En wederom alleen den positieven wortel nemende

$$x^2=16,$$

en dus $$x=4.$$

De waarde van x gesteld in de vergelijking $xyz=60$, geeft

$$yz=15,$$

en hierdoor wordt de vergelijking $x^2+y^2=z^2$

$$16+y^2=\frac{225}{y^2},$$

of $$y^4+16y^2=225,$$

waaruit wederom volgt $y^2=-8\pm\sqrt{289}$

$$=-8\pm 17,$$

en dus $$y^2=9,$$

of $$y=3.$$

De zijden van den driehoek zijn dan 3, 4 en 5.

CXLIX. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Twee kooplieden hebben 600 gulden tot eenen gemeenschappelijken handel uitgelegd, A is in den handel geweest 5 maanden en ontvangt voor kapitaal en winst 405 gulden, B heeft slechts 3 maanden in den handel gedaan en ontvangt voor zijn aandeel in kapitaal en winst 258 gulden. Vrage naar ieders inleg?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. N. CALTEN, H. STROOTMAN, J. JONKHEER, M. H. GODEFROI, J. W. WINTER MOMMA, C. F. JULIUS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, M. G. SNOER, M. DE LEON *en* W. A. FROGER.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Zij de inleg van $A = x$ dan is die van B $600 - x$, de geheele winst na aftrek van den inleg $663 - 600 = 63$ gulden zijnde, en deze naar evenredigheid van kapitaal en tijd moetende verdeeld worden, zoo heeft men uit het voorstel terstond, daar de winst van A is $405 - x$, en die van B $258 - (600 - x)$, de evenredigheden

$$5x + 3(600 - x) : 5x = 63 : 405 - x,$$

en $$5x + 3(600 - x) : 3(600 - x) = 63 : 258 - (600 - x).$$

De eerste geeft dadelijk

$$2x + 1800 : 5x = 63 : 405 - x,$$

of $$315x = -2x^2 - 990x + 729000,$$

en dus $$x^2 + \tfrac{1305}{2}x = 364500,$$

waaruit volgt $$x = -\tfrac{1305}{4} \pm \sqrt{(364500 + (\tfrac{1305}{4})^2)},$$

of $$x = -\tfrac{1305}{4} \pm \tfrac{2745}{4},$$

en dus $$x = \tfrac{1440}{2} = 360,$$

of $$x = -\tfrac{2025}{2},$$

De positieve waarde voor x geeft $y = 240$, en zijn de oplossing van het vraagstuk.

AANMERKING VAN J. N. CALTEN. Ten einde de negatieve waarde van x, waarbij men voor y vindt 1612,5, te verklaren, merke men op, dat door de winst te verdeelen naar evenredigheid van den tijd en het aangebragte kapitaal, het blijkbaar is, dat zoo men in plaats van geld tot eenen gemeenschappelijken handel bij te brengen, geld uit het bijeen gebragte kapitaal weg neemt, men nu ook omgekeerd in plaats van geld uit den winst te

te ontvangen geld zal moeten betalen, wegens de winstderving welke den gemeenschappelijken handel door het terug nemen van het geld geleden heeft. Doch heeft nu de gemeenschappelijke handel verlies aangebragt, dan ook omgekeerd kan de deelhebber, welke geld terug genomen heeft, ontvangen terwijl de overigen betalen, aangezien hij nu door het terug nemen het verlies verkleind heeft. De hier gevondene negatieve inleg van A of $x = -1012{,}5$ toont aan dat A werkelijk deze som heeft terug genomen, terwijl de inleg van B was 1612,5, den gemeenschappelijken handel heeft echter verlies aangebragt, dewijl het gebruikte kapitaal van 1612,5 slechts 663 opgeleverd heeft, derhalve ontvangt A dan nog eene uitkeering, omdat nu het terug houden van een gedeelte van den inleg het verlies heeft verminderd. De geheele voorgaande oplossing bevestigt dit dan ook, want uit dezelve blijkt dat de winst van eene gulden per maand is geweest

$$\frac{63}{5x+3(600-x)} = \frac{63}{2x+1800}.$$

Stel nu voor x zijne negatieve waarde of $-1012{,}5$, dan vindt men voor de voorgaande uitdrukking $-\frac{7}{25}$. Dewijl dan A gedurende 5 maanden 1012,5 gulden heeft terug gehouden, heeft hij een verlies belet van $5 \cdot \frac{7}{25} \times 1012{,}5 = 1417{,}5$ die hem moeten betaald worden, en daar hij reeds 1012,5 genoten heeft, komt hem, zoo als in het voorstel gevraagd wordt, nog $1417{,}5 - 1012{,}5 = 405$ toe. B daarentegen betaalt een verlies van $3 \cdot \frac{7}{25} \cdot 1612{,}5 = 1354{,}5$, en daar zijn inleg was 1612,5, ontvangt hij nog 258, zoo als het voorstel opgeeft.

CL. VOORSTEL.

Door L. VAN HEUSDEN.

Van eenen regthoekigen driehoek staat de kortste der regthoekzijden tot de schuine zijde als 3 : 5, terwijl het vierkant van de som dezer beide zijden gelijk is aan de cubus van derzelver verschil. Men vraagt naar de zijden van den driehoek?

OPGELOST *door* L. VAN HEUSDEN, H. STROOTMAN, J. DOORMAN, G. BRANDSTEDER, J. W. WINTER MOMMA, M. DE LEON, C. F. JULIUS, J. JONKHERT, M. G. SNOER, J. N. CALTEN, G. GRAAFLAND, W. A. FROGER, M. H. GODEFROI, C. VAN SCHAICK, J. BASSAN *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OP-

OPLOSSING *van* L. VAN HEUSDEN.

Stel de eene regthoekzijde $=3x$, en de schuinsche zijde $=5x$, dan is aan de eerste voorwaarde van het vraagstuk voldaan. De derde zijde wordt nu gevonden door de uitdrukking

$$\sqrt{(25x^2-9x^2)}=4x.$$

Het vierkant van de som der beide zijden is $(8x)^2=64x^2$ en hun verschil $2x$, waarvan de derde magt $8x^3$, wij hebben dan de vergelijking,

$$64x^2=8x^3,$$

of $$64=8x,$$

en $$x=8,$$

zoodat de drie zijden zijn 40, 32 en 24.

CLI. VOORSTEL.

Door L. VAN HEUSDEN.

Als uit den tophoek P *van eenen regthoekigen driehoek* AEP *binnen denzelven drie regte lijnen* PB, PC *en* PD *getrokken worden, zoodanig dat zij den hoek* P *in vier gelijke hoeken verdeelen, en dat de segmenten* AB, BC *en* CD, *welke deze lijnen van de overstaande regthoekzijde afsnijden, te rekenen van den regten hoek* A, *gegeven zijn, zoo vraagt men hieruit den geheelen driehoek te bepalen?*

OPGELOST *door* W. A. FROGER, L. VAN HEUSDEN, J. BADON GYBEN, J. N. CALTEN, M. DE LEON, C. E. H. HOMBACH, J. JONKHERT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* W. A. FROGER.

Laat APE (*Fig.* 54) de gevraagde driehoek zijn, waarin de hoeken APB, BPC, CPD en DPE alle even groot zijn, en alwaar de lijnen $AB=p$, $BC=q$, $CD=r$ en $DE=s$ gegeven zijn. Omdat dan in den driehoek APC de hoek APC in twee gelijke deelen verdeeld is, heeft men de evenredigheid

$$AP:PC=AB:BC,$$

en dus $$PC^2=\frac{CB^2}{BA^2}\times AP^2.$$

Maar nu is ook $$CP^2=AP^2+AC^2,$$

derhalve $$AP^2+AC^2=\frac{CB^2}{AB^2}\times AP^2,$$

of $$AB^2AP^2+AC^2\times AB^2=CB^2\times AP^2,$$

waar-

waaruit volgt $AP^2 = AB^2 \frac{AC^2}{CB^2 - AB^2}$

$$= AB^2 \frac{(AB+BC)^2}{CB^2 - AB^2}$$

$$= AB^2 \frac{AB+BC}{CB-AB},$$

dus $$AP = AB \sqrt{\left(\frac{AB+BC}{CB-AB}\right)}$$

$$= p\sqrt{\frac{p+q}{q-p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

De zijde AP bekend zijnde, is de geheele driehoek bekend, dewijl de zijde $AE = p+q+r+s$ gegeven is.

Daar men tot de oplossing van het vraagstuk de betrekking van CD : DE of van $r:s$ niet gebruikt heeft, zoo volgt daaruit dat in het vraagstuk eene voorwaarde te veel is opgegeven. Het is gemakkelijk uit de gegevene waarde van AB en BC, die van CD en DE af te leiden; want daar de hoek APE door PC midden door gedeeld is, heeft men de evenredigheid

$$AP : PE = AC : CE,$$

alsmede $$PE^2 = AP^2 + (AC + CE)^2,$$

en uit deze beide vergelijkingen vindt men op dezelfde wijze als hier voren

$$AP = (p+q)\sqrt{\frac{p+q+r+s}{r+s-(p+q)}},$$

en dit met (1) verbonden geeft

$$p^2 \frac{p+q}{q-p} = (p+q)^2 \frac{p+q+r+s}{r+s-(p+q)},$$

of $$p^2(r+s-p-q) = (p+q)(q-p)(p+q+r+s)$$

$$= (q^2-p^2)(p+q+r+s),$$

en dus $$q^2(p+q+r+s) = 2(r+s)p^2,$$

alzoo $$r+s = \frac{q^2(p+q)}{2p^2-q^2}.$$

De waarde van AP laat zich uit de vergelijking (1) gemakkelijk construeren. Men neme op eene lijn MP (*Fig.* 55) $MN = p+q$ en $NP = q-p$, en beschrijve op MP den halven cirkel MSP, makende verder $RS = p$, en trekkende RT evenwijdig aan

PM tot dat zij het verlengde van SM in T snijdt, alsdan is ST = AP, *Fig.* 54. Want

$$TS^2 : SR^2 = MS^2 : SP^2 = MN : NP,$$

dus

$$TS = SR\sqrt{\frac{MN}{NP}}.$$

CLII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Indien men in eenen driehoek ABC, *uit een willekeurig punt* D *van eene der zijden, eene lijn* DF *evenwijdig aan de zijde* AC *trekt, en uit het snijpunt* F *van deze lijn met de tweede zijde* BC *eene lijn* FE *evenwijdig aan de zijde* AB *trekt, zoo ontstaan er twee driehoeken* DAF *en* FEC, *welke de eigenschap zullen hebben, dat de som des vierkantswortels uit hunnen inhoud, gelijk zal zijn aan den vierkantswortel uit den inhoud van den geheelen driehoek. Men vraagt naar het bewijs?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BADON GHIJBEN, J. N. CALTEN, W. A. FROGER, J. BASSAN, J. JONKHERT, E. OLIVIER DZ., M. DE LEON, M. G. SNOER, G. GRAAFLAND *en* C. E. H. HOMBACH.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Zij ABC (*Fig.* 56) de driehoek, waarin DF en FE evenwijdig aan BC en AB zijn getrokken, dan zijn de driehoeken ADF en FEC beide gelijkvormig aan den driehoek ABC en dus ook onderling gelijkvormig; zoodat stellende den inhoud van ABC = I, die van ADF = i, en die van CFE = i', dan zal men hebben

$$i : i' = DF^2 : EC^2,$$

of

$$\sqrt{i} : \sqrt{i'} = DF : EC,$$

en dus ook

$$\sqrt{i} + \sqrt{i'} : \sqrt{i} = DF + EC : DF.$$

Maar daar de figuur DFEB een parallelogram is, wegens de evenwijdigheid der lijnen DF met BC, en FE met AB, zoo is DF = BE, waardoor de laatste evenredigheid overgaat in

$$\sqrt{i} + \sqrt{i'} : \sqrt{i} = BC : DF.$$

Maar nu is ook

$$\sqrt{i} : \sqrt{I} = DF : BC,$$

en uit het product dezer evenredigheden volgt dan

$$\sqrt{i} + \sqrt{i'} : \sqrt{I} = I : I,$$

of

$$\sqrt{i} + \sqrt{i'} = \sqrt{I}.$$

Hetgeen te bewijzen was.

AAN-

AANMERKING. Uit de laatste vergelijking volgt verder, door het verheffen tot den tweeden magt,

$$i + i' + 2\sqrt{ii'} = 1,$$

of $$\sqrt{ii'} = \tfrac{1}{2}(1 - i + i'),$$

en daar nu blijkbaar

$$1 - i - i' = \text{drieh. ABC} - \text{drieh. AFD} - \text{drieh. FEC}$$
$$= \text{parall. DFEB}$$

is, en dus ook

$$\tfrac{1}{2}(1 - i - i') = \tfrac{1}{2}\text{ parall DFEB}$$
$$= \text{drieh. DBE},$$

zoo is dus $$\sqrt{ii'} = \text{drieh. DBE},$$

of wel de driehoek DBE is midden evenredig tusschen de driehoeken AFD en FEC.

CLIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Indien de som der zijden van eenen regthoekigen driehoek gegeven is, benevens één der scherpe hoeken, zoo vraagt men de zijden te berekenen?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BADON GHIJBEN, M. G. SNOER, W. A. FROGER, J. N. CALTEN, C. E. H. HOMBACH, G. GRAADLAND, M. DE LEON, M. H. GODEFROI, J. BASSAN, J. JONKHEAT en E. OLIVIER, Dz.

I. OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Zoo ABC (*Fig.* 57) de begeerde driehoek is, waarin hoek $ACB = \alpha$ gegeven is, dan kan men de som der zijden AB, BC en AC gelijk s stellen en nemen $AC = x$; alsdan is blijkbaar

$$AB = x\,Sin.\,\alpha,$$
$$BC = x\,Cos.\,\alpha,$$

en $$AC = x.$$

De som dezer vergelijkingen geeft dan

$$s = x(1 + Sin.\,\alpha + Cos.\,\alpha),$$

of $$x = \frac{s}{1 + Sin.\,\alpha + Cos.\,\alpha}.$$

Tot het gemakkelijk berekenen dezer waarde in logarithmen stelle men voor $Sin.\,\alpha$, $2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha$ en voor $Cos.\,\alpha$, $2Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha - 1$, dan heeft men

$$x = \frac{s}{2\,Sin.\,\frac{1}{2}\alpha\,Cos.\,\frac{1}{2}\alpha + 2\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\alpha},$$

$$= \frac{s}{2\,Cos.\,\frac{1}{2}\alpha\,(Sin.\,\frac{1}{2}\alpha + Cos.\,\frac{1}{2}\alpha)},$$

$$= \frac{s\sqrt{2}}{4\,Cos.\,\frac{1}{2}\alpha\,Sin.\,(45° + \frac{1}{2}\alpha)}.$$

II. Oplossing *door* M. G. Snoer.

Zij in *Fig.* 58, BC gelijk aan de gegevene som der zijden en hoek A de gegevene scherpe hoek, dan make men *hoek* DBC = *hoek* A en trekke CD loodregt op BD. Verder deele men de hoeken DBC en DCB door de lijnen BG en CG midden door, en trekke door het snijpunt G de lijnen GE en GF evenwijdig aan BD en DC, dan zal EGF de begeerde driehoek zijn. Want vooreerst is de driehoek EGF regthoekig en heeft den hoek GEF = DBC = A, maar omdat

hoek GCD = *hoek* GCF,

en *hoek* GCD = *hoek* CGF,

zoo is *hoek* GCF = *hoek* CGF,

en derhalve FC = GF;

om dezelfde rede is ook EG = BE, en derhalve de som der zijden van den driehoek EGF = BC.

CLIV. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men vraagt naar drie getallen die onderling één verschillen, wier som door 7 en wier product door 8 deelbaar zij?

Opgelost *door* J. Bassan, J. Badon Ghyben, J. N. Calten, W. A. Froger, C. E. H. Hombach, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Jonkhert, N. J. Singels, M. G. Snoer, F. van Heukelom Jz., M. H. Godefroi, G. Brandsteder *en* J. C. van Schaick.

Oplossing *van* J. Bassan.

Laten de gevraagde getallen voorgesteld worden door

$$7x - 1,\quad 7x \text{ en } 7x + 1,$$

dan is hunne som deelbaar door 7, en alzoo aan de eerste voorwaarde voldaan. Het product dezer getallen is nu

$$7x(7x - 1)(7x + 1) = A,$$

dit kan nu niet door 8 deelbaar zijn dan in de drie volgende ge-

val-

vallen. 1°. Zou elke factor door 2 deelbaar kunnen zijn. 2°. Een der factoren zou door 2 en een der overige door 4 deelbaar kunnen zijn; of 3°. een der factoren zou door 8 kunnen deelbaar zijn. Het eerſte geval is blijkbaar onmogelijk, omdat als $7x$ door twee deelbaar is, dan kan $7x+1$ noch $7x-1$ zulks wezen. Doch is een der factoren $7x-1$ of $7x+1$ door 4 deelbaar, dan is ook zeker de andere door 2 deelbaar. Men kan dus ſtellen

$$7x-1=4m,$$

en dan heeft men

$$A=4m(4m+1)(4+2)=8m(2m+1)(4m+1),$$

en

$$7x=4m+1,$$

of

$$x=\frac{4m+1}{7}.$$

En daar x een geheel getal moet zijn, neme men $m=7n-2$ dan is

$$x=\frac{28n-7}{7}=4n-1.$$

De kleinſte waarde voor n is de eenheid, dewijl anders m geen geheel getal zoude zijn, en door deze waarde verkrijgt men $x=3$, en voor de gevraagde getallen 20, 21 en 22; voor andere waarden van n vindt men weder andere reekſen van getallen. Men kan echter uit den vorm der laatſte waarde van A opmaken, dat als men ſlechts voor $2m$ een oneven getal neemt, het getal A nog door 2 deelbaar blijft, want men kan ſchrijven

$$A=8.2m\frac{2m+1}{2}(4m+1),$$

en dan is $\frac{2m+1}{2}$ voor elke onevene waarde van $2m$, een geheel getal. Neemt men derhalve $n=\frac{1}{4}$, dan wordt $x=1$ en $2m=3$, en de gevraagde getallen zijn 6, 7 en 8, die nu ook de kleinſt mogelijke zijn.

Voor het derde geval ſtelle men $x=8q$, alsdan wordt onmiddellijk aan de begeerde voorwaarde voldaan; de kleinſte reeks van getallen vindt men dan door $q=1$ te ſtellen, en dan heeft men voor de getallen 55, 56 en 57.

CLV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt vier getallen te vinden, welke onderling 1 verſchillen, wier ſom door 5 en product door 7 deelbaar zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. BADON GHYBEN, W. A. FROGER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. N. CALTEN, C. E. H. HOMBACH, G. BRANDSTEDER, F. VAN HEUKELOM Jz., M. G. SNOER, M. H. GODEFROI, J. JONKHERT *en* N. J. SINGELS.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel voor de begeerde getallen

$$5x-4,\quad 5x-3,\quad 5x-2 \text{ en } 5x-1,$$

dan is hunne ſom

$$5(4x-2),$$

er is alzoo aan de eerſte voorwaarde voldaan; de tweede voorwaarde vereischt dat een der factoren door 7 deelbaar zij. Men ſtelle dan

$$5x-3=7q,$$

en dus

$$x=\frac{7q+3}{5}.$$

Neemt men nu $q=5n+1$, dan wordt

$$x=7n+2.$$

Alle gehoele waarden voor n genomen, geven dus getallen aan de vraag voldoende. De kleinſte getallen vindt men door $n=0$ te nemen. Alsdan is $x=2$ en de getallen worden 6, 7, 8 en 9.

CLVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Om en in eenen cirkel is eenen regelmatigen n-hoek beſchreven, wanneer nu het verſchil der zijden gegeven is, vraagt men den ſtraal van den cirkel te berekenen.

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. BADON GHYBEN, J. N. CALTEN, W. A. FROGER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. JONKHERT, M. DE LEON, C. E. H. HOMBACH *en* M. H. GODEFROI.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Indien AB en CD, (*Fig.* 59) de zijden van den regelmatigen n-*hoek* in en om den cirkel beſchreven voorſtellen, dan moet

$$\textit{hoek}\ \mathrm{COD}=\frac{360}{n}$$

zijn.

zijn. Stelt men dus $CD - AB = a$, en $AO = r$, dan is uit de driehoeken COD en ABO

$$CD = 2 . OF \, Tang. COF,$$

en

$$AB = 2 \, AO \, Sin. \, COF,$$

of

$$CD = 2r \, Tang. \frac{180^\circ}{n},$$

en

$$AB = 2r \, Sin. \frac{180^\circ}{n};$$

en deze vergelijkingen van elkander afgetrokken geven:

$$CD - AB = a = 2r \left(Tang. \frac{180^\circ}{n} - Sin. \frac{180^\circ}{n} \right),$$

en alzoo

$$r = \tfrac{1}{2} a \frac{1}{Tang. \frac{180^\circ}{n} - Sin. \frac{180^\circ}{n}},$$

$$= \tfrac{1}{2} a \frac{1}{Sin. \frac{180^\circ}{n} \left(\frac{1}{Cos. \frac{180^\circ}{n}} - 1 \right)},$$

$$= \frac{a \, Cos. \frac{180^\circ}{n}}{2 \left(1 - Cos. \frac{180^\circ}{n} \right)} = \frac{a \, Cos. \frac{180^\circ}{n}}{4 \, Sin^2. \frac{90^\circ}{n}}.$$

Voor $n = 3$ of voor den gelijkzijdigen driehoek vindt men nu, bij voorbeeld:

$$r = a \frac{Cos. 60^\circ}{4 \, Sin^2. 30} = \tfrac{1}{2} a.$$

CLVII. VOORSTEL.

Door J. C. VAN SETTEN.

Welk is het kleinſte getal een veelvoud van 7 zijnde, en dat door 6, 5, 4, 3 en 2 gedeeld wordende, altijd 1 tot reſt geeft?

OPGELOST *door* J. C. VAN SETTEN, J. BADON GHYBEN, W. A. FROGER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. N. CALTEN, C. E. H. HOMBACH, G. BRANDSTEDER, M. G. SNEER, M. H. GODEFROI, J. BAISAN, F. VAN HEUKELOM Jz., J. JONKHERT *en* N. J. SINGELS.

OPLOSSING *van* J. C. VAN SETTEN.

Het begeerde getal $= x$ zijnde, dan moet $x - 1$ door 2, 3,

4, 5 en 6 deelbaar zijn, en daar het kleine gemeene veelvoud dezer deelers gelijk 60 is, zoo moet $x-1=60p$ zijn; maar volgens de eerſte voorwaarde moet x door zeven deelbaar zijn, of

$$\frac{x}{7}=\frac{60p+1}{7}=8p+\frac{4p+1}{7}$$

een geheel getal zijn. Stellende dan $4p+1=7n$, dan wordt

$$p=n+\frac{3n-1}{4},$$

en wederom $3n-1=4m$ ſtellende, komt er

$$n=m+\frac{m+1}{3}.$$

Nemende nu $m=2$ als de kleinſte mogelijke waarde, dan wordt $n=3$, $p=5$ en alzoo $x=5.60+1=301$, dat alzoo het gevraagde getal is.

CLVIII. VOORSTEL.

Door J. C. VAN SETTEN.

Zeker getal beſtaat uit drie cijfers, waarvan die der honderd en tientallen oneven zijn, terwijl het laatſte gelijk is aan tweemaal dat der honderdtallen min 2; het product der cijfers is gelijk aan tienmaal hunne ſom plus 20; en eindelijk het getal door 2 gedeeld zijnde, zal de ſom der cijfers van het quotient gelijk zijn aan de ſom der cijfers van het gevraagde getal. Men vraagt dit getal te bepalen?

OPGELOST *door* J. BADON GHYBEN, J. C. VAN SETTEN, G. BRANDSTEDER, J. N. CALTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, W. A. FROGER, C. E. H. HOMBACH, M. DE LEON, J. BASSAN, M. G. SNOER, M. H. GODEBROI, F. VAN HEUKELOM JR., J. JONKHERT *en* N. J. SINGELS.

ONTLOSSING *van* J. BADON GHYBEN.

Het cijfer der eenheden door x, dat der tientallen door $1+2y$ en dat der honderdtallen door $1+2z$ voorſtellende, zoo is aan de eerſte voorwaarde voldaan en het getal blijkbaar

$$x+10+20y+100+200z;$$

dit door 2 deelende komt er

$$\frac{x}{2}+5+10y+50+100z,$$

dit

dit quotient bevat nu $\frac{x}{2}+5$ eenheden, $y+5$ tientallen en z honderdtallen,

Nu geeft de tweede voorwaarde

$$x=2(1+2z)-2,$$

of

$$x=4z,$$

en daar de laatſte voorwaarde geeft

$$z+1+2y+1+2z=\frac{x}{2}+5+y+5+z,$$

zoo vindt men na herleiding en $x=4z$ geſteld te hebben

$$2y+6z=16,$$

en dus

$$3z+y=8.$$

Maar nu moet $1+2y<10$ zijn uit den aard van ons tientallig ſtelſel van tellen, en alzoo ook $y<5$, dit afrekkende van de laatſte vergelijking komt er

$$3z>3,$$

of

$$z>1.$$

Maar nu volgt ook nog uit de laatſte vergelijking

$$y=8-3z,$$

en zal dus y een geheel poſitief getal zijn, zoo moet

$$3z<8,$$

of

$$z<3$$

zijn; de eenige mogelijke waarde van z is dus $z=2$, en dit geeft dan, daar $x=4z$ is, $x=8$ en $y=2$, en alzoo voor het gevraagde getal 358.

AANMERKINGEN. Omdat $x=4z$ moet zijn, en x niet grooter dan 9 mag worden, zoo kan z niet grooter dan 2 worden, en deze voorwaarde verbonden met die van $z>1$, in de voorgaande oplosſing gevonden, is dan mede genoegzaam tot het vinden van het begeerde getal.

Indien men de voorwaarde, dat de cijfers van het gevraagde getal niet grooter dan 9 mogen zijn, weg laat, en in plaats daarvan de derde voorwaarde van de opgave gebruikt, zoo vervalt men op eene derdemagtsvergelijking, die door den hier gevolgden weg vermeden wordt, en het blijkt dus dat eigenlijk de genoemde derde voorwaarde ontbeert konde worden.

CLIX. VOORSTEL.

Door G. GRAAFLAND.

Iemand gevraagd zijnde hoe laat het was, antwoordde: het is tusschen 5 en 6 uur, en juist bedekt de uurwijzer den minuutwijzer, men vraagt hoe laat het toen was?

OPGELOST *door* G. GRAAFLAND, G. BRANDSTEDER, J. JONKHERT, M. H. GODEFROI, N. J. SINGELS, F. VAN HEUKELOM JR., M. DE LEON, W. A. FROGER, J. BASSAN, M. G. SNOER, C. E. H. HOMBACH, J. N. CALTEN *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* G. GRAAFLAND.

De uurwijzer op het oogenblik dat het 5 uur is, 25 minuten den minuutwijzer vooruit zijnde, zoo stelle men het aantal minuten door dezen laatsten te doorloopen tot dat hij den eersten inhaalt $= x$, zoo is dat van den uurwijzer $x - 25$, en daar nu de snelheden van beide wijzers tot elkander staan als 12 : 1, zoo hebben wij de evenredigheid

$$x : x - 25 = 12 : 1,$$

waaruit volgt $x = 27\frac{3}{11}$ minuut,

of $x = 27' 16\frac{4}{11}''$.

Het was dus op het gevraagde oogenblik

5 uren 27 minuten $16\frac{4}{11}$ seconden.

CLX. VOORSTEL.

Door J. N. CALTEN.

Wanneer de snelheid c bekend is van eenen stroom overal h ellen breed, welke men in eenen boot wil overvaren, waarvan door roeijen of anderzins eene eenparige snelheid c' in de rigting zijner lengte wordt medegedeeld, zoo vraagt men, welken standvastigen hoek Φ de boot met de rigting van den stroom moet houden, om den overtogt in den kortsten tijd te doen, en welke den hiertoe bestemden tijd zal wezen?

OPLOSSING *van* J. N. CALTEN.

Laten AY en BD (*Fig.* 60) de evenwijdige oevers der rivier voorstellen, zoodat de loodlijn $AB = h$ is; zij verder M*m* de standvastige rigting van den boot, en stellen wij den standvastigen hoek $PMm = \Phi$; is nu de boot in het punt M gekomen uit A afvarende, dan zal dezelve in het volgende tijddeeltje ∂t door

de

de ſnelheid van den ſtroom in de rigting Mn, evenwijdig aan AY afgedreven worden op eenen afſtand $Mm = c\partial t$, terwijl de boot in de rigting van zijne lengte eenen weg $Mm' = c'\partial t$ aflegt; deze beide bewegingen brengen dus den boot aan het einde van het tijddeeltje ∂t, in het hoekpunt M' van het parallelogram $m'MnM'$. Stellende dan $AP = x$ en $PM = y$, zoo is $AP' = x + \partial x$ en $P'M' = y + \partial y$; verder is $MN = Mm' Sin.\phi = c'\partial t Sin.\phi$ en $Nm' = Mm' Cos.\phi = c'\partial t Cos.\phi$, derhalve

$$PP' = NM = \partial x = c' Sin.\phi \partial t \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

en $NM' = \partial y = Nm' + m'M' = c'\partial t Cos.\phi + c\partial t \quad . \quad (2).$

Deze beide vergelijkingen in elkander gedeeld geven

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c' Cos.\phi + c}{c' Sin.\phi}.$$

Hieruit volgt door integreren

$$y = \frac{c' Cos.\phi + c}{c' Sin.\phi} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

waarbij geene ſtandvastige behoeft, omdat voor $x = o$ ook $y = o$ is. De weg door den boot beſchreven is dus eene regte lijn.

Het landingspunt van den boot wordt gevonden door in (3) $x = h$ te nemen, alsdan is

$$y = \frac{c' Cos.\phi + c}{c' Sin.\phi} h;$$

en de lengte W van den weg door den boot doorlooopen is dan

$$W = h\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{c' Cos.\phi + c}{c' Sin.\phi}\right)^2\right\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Deze weg zal den kortſten worden wanneer de term

$$\left(\frac{c' Cos.\phi + c}{c' Sin.\phi}\right)^2$$

zijne kleinſte waarde verkrijgt, en dit heeft blijkbaar plaats als men heeft

$$\frac{c' Cos.\phi + c}{c' Sin.\phi} = o,$$

of $c' Cos.\phi + c = o,$

waaruit volgt $Cos.\phi = -\frac{c}{c'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$

hetwelk alzoo den voordeeligſten hoek is om den kortſten weg bij den overtogt af te leggen. De negatieve waarde van $Cos.\phi$ wijst

wijst aan dat de hoek PMm ſtomp moet zijn, en dat derhalve de boot in de rigting MM$'$ moet geſteld worden.

Indien $c > c'$ is, dan is $Cos.\phi > 1$ en alzoo ϕ onbeſtaanbaar, het is alsdan niet geoorloofd de tweede term van het worteltee-ken in (4) gelijk nul te ſtellen. Differentieert men dan dezen term om zijne kleinſte waarde te vinden, zoo vindt men, nemende

$$z = \frac{c' Cos.\phi + c}{c' Sin.\phi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{1}{c'} \frac{-c' - c\, Cos.\phi}{Sin^2.\phi} \quad \ldots\ldots (6),$$

en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c'} \frac{c\, Sin^2.\phi + 2\, Cos.\phi (c' + c\, Cos.\phi)}{Sin^3.\phi}$$

$$= \frac{1}{c'} \frac{c + Cos.\phi (2c' + c\, Cos.\phi)}{Sin^2.\phi} \quad \ldots\ldots (7),$$

Uit (6) volgt

$$Cos.\phi = -\frac{c'}{c} \quad \ldots\ldots\ldots (8),$$

welke waarde een minimum aanduidt, omdat (7) hierdoor overgaat in

$$\frac{1}{c'} \cdot \frac{c^2 - c'^2}{c\, Sin^3.\phi},$$

welke waarde altijd poſitief is, zoo $c < c'$ is, zoo als voor de be-ſtaanbaarheid van de vergelijking (8) vereiſcht wordt, zijnde ver-der $Sin\ \phi$ altijd poſitief voor hoeken kleiner dan 180° zoo als hier bedoeld worden. Wanneer dan de vergelijking (5) onbe-ſtaanbaar wordt zoo moet de vergelijking (8) genomen worden, welke juist beſtaanbaar wordt als (3) dit niet is.

Voor het eerſte geval namelijk $c < c'$ verkrijgt men den kort-ſten weg voor $Cos.\phi = -\frac{c}{c'}$, die alsdan $= h$ wordt; zoodat de boot nu de lijn AB volgt. In het tweede geval voor $c > c'$ is de doorgeloopene weg

$$W = hV\left\{1 + \frac{c^2 - c'^2}{c'^2}\right\}$$

$$= \frac{c}{c'} h.$$

Voor het geval van $c = c'$ geeft de vergelijking (4)

$$W = hV\left\{1 + \left(\frac{1 + Cos.\phi}{Sin.\phi}\right)^2\right\},$$

wel-

welke de kleinst mogelijke waarde verkrijgende voor

$$\frac{1+Cos.\,\phi}{Sin.\,\phi}=0,$$

of voor $Cos.\,\phi=-1$,

aanwijst dat voor $c=c'$ de boot eenen hoek van 180° met de rigting van den ſtroom moet maken, dat is: juist in tegengeſtelde rigting van die van den ſtroom bewogen worden, alsdan is de doorgeloopene weg $=h=AB$. Het is echter duidelijk dat de boot in die rigting bewogen wordende nooit de andere oever bereiken kan; ter opheldering hiervan zullen wij den tijd berekenen tot den overtogt vereischt.

Uit (1) hebben wij

$$\partial x=c'\,Sin.\,\phi\,\partial t,$$

en dus $x=c't\,Sin.\,\phi$,

waarbij ook geene ſtandvastige behoeft, als men den tijd van het begin van den overtogt rekent. Voor $x=h$ heeft men den tijd tot den geheelen overtogt vereischt

$$t=\frac{h}{c'}\cdot\frac{1}{Sin.\,\phi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Is nu $\phi=180$ zoo wordt $Sin.\,\phi=0$ en t oneindig, men kan dus in dat geval nooit de andere oever bereiken; ja zelfs daar in het algemeen

$$t=\frac{x}{c'}\cdot\frac{1}{Sin.\,\phi}$$

is, ziet men, dat, om ook maar eenen kleinen afſtand $AP=x$ vooruit te komen, reeds een oneindige tijd vereischt wordt.

Uit (2) hebben wij op dezelfde wijze

$$t=\frac{y}{c'\,Cos.\,\phi+c},$$

hetwelk voor $c=c'$ en $Cos.\,\phi=-1$ ook eenen oneindigen tijd geeft, de boot zal dus in dit geval eigenlijk geheel ſtil ſtaan.

Men zou ook kunnen vragen, welke de rigting van den boot zoude moeten zijn om dezen overtogt in den kortſten tijd te doen, en dan volgt uit (9) onmiddelijk dat dit voor $\phi=90°$ zal plaats hebben; in het algemeen heeft dus de kortſte overtogt niet volgens den kortſten weg plaats.

Eindelijk moet men nog opmerken dat hier altijd onderſteld is,

dat

dat de boot, in de rigting zijner lengte met dezelfde snelheid voort bewoog, onder welken hoek hij ook met den stroom mogt bewegen, hetgeen bij de uitvoering geheel verschillende krachten zou vereischen

CLXI. VOORSTEL.

Door J. N. CALTEN.

Aan eenen stroom overal h ellen breed en waarvan de snelheid c bekend is, zijn twee landingspunten in eene lijn regthoekig op den oever getrokken, gelegen. Zoo men nu uit het eene punt met eenen boot afvaart, welke door roeijen of anderzins eene eenparige snelheid c' in de rigting zijner lengte gegeven wordt, dan zal men door den stroom afgedreven wordende, zich telkens naar het tweede landingspunt kunnen rigten. Men vraagt naar den weg alsdan door den boot beschreven, en naar den tijd tot den overtogt besteed?

OPGELOST *door* J. N. CALTEN *en* F. J STAMKART.

OPLOSSING *van* J. N. CALTEN.

Laten de lijnen AY en BL (*Fig.* 61) de oevers van den stroom voorstellen, en A en B de landingspunten; de boot in eenig punt D gekomen zijnde, is dan volgens de lijn DB gerigt en heeft in die rigting eene snelheid c', waarmede dezelve in den tijd ∂t den weg $DC = c'\partial t$ zoude afleggen, doch in dien tijd wordt dezelve in de rigting CF afgedreven op eene lengte van $CF = c\partial t$; stellende dus $AP = x$, $PD = y$, $PP' = \partial x$ en $IF = \partial y$ alsmede $AB = h$, zoo heeft men

$$\partial y = IF = CF - CI$$
$$= c\partial t - DC\ Cos.\ CDI = c\partial t - c'\partial t\ Sin.\ ABD.$$

Verder is $PP' = \partial x = DC\ Cos.\ ABD = c'\partial t\ Cos.\ ABD$,

en deelende deze vergelijking in de voorgaande, zoo komt er

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c}{c'\ Cos.\ ABD} - Tang.\ ABD.$$

Maar $$Tang.\ ABD = \frac{y}{h-x},$$

en dus $$Cos.\ ABD = \frac{h-x}{\sqrt{((h-x)^2+y^2)}}$$

zijnde, zoo verkrijgen wij

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c\sqrt{((h-x)^2+y^2)}}{c'(h-x)} - \frac{y}{h-x}.$$

Stel-

Stellende nu $\frac{c}{c'}=n$, $h-x=v$ en $y=zv$, dan verandert de laatſte vergelijking in

$$-\frac{\partial.zv}{\partial v}=\frac{nV(v^2+z^2v^2)-zv}{v},$$

of $$-z-v\frac{\partial z}{\partial v}=nV(1+z^2)-z,$$

en dus $$-\frac{\partial v}{v}=\frac{\partial z}{nV(1+z^2)}.$$

Deze vergelijking integrerende komt er

$$-Log.vC=-\frac{1}{n}Log.(-z+V(1+z^2))$$ (Zie I. R. SCHMIDT, *Dif. en Int. Rek.* § 188).

of wel $$(vC)^n=-z+V(1+z^2);$$

en hierin voor v en z hunne waarde ſtellende, komt er

$$\{(h-x)C\}^n=-\frac{y}{h-x}+V\{1+\frac{y^2}{(h-x)^2}\} \quad . \quad (a).$$

Voor $x=o$ is $y=o$ en derhalve

$$h^nC^n=1,$$

of $$C^n=\frac{1}{h^n}.$$

De vergelijking (a) der kromme lijn wordt dus

$$\frac{(h-x)^{n+1}}{h^n}=-y+V((h-x)^2+y^2) \quad . \quad (a').$$

Het worteltceken verdrijvende en y afzonderende, komt er

$$y=\frac{h^{2n}-(h-x)^{2n}}{2h^n(h-x)^{n-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta),$$

of $$y=\frac{h-x}{2h^n}\{h^{2n}(h-x)^{-n}-(h-x)^n\} \quad . \quad (\gamma).$$

Het punt van den oever BL, alwaar de boot aankomt, vindt men uit (β) door $h=x$ te ſtellen; is dus $n>1$ zoo wordt voor $h=x$, y oneindig, doch is $n<1$ zoo wordt $y=o$. In het eerſte geval is $c<c'$ óf de ſnelheid van den ſtroom grooter dan

dan die van den boot, en alsdan bereikt de boot den oever niet dan op eenen oneindigen afſtand van het punt B; is daarentegen de ſnelheid van den boot grooter dan die van den ſtroom, dan komt de boot juist in het landingspunt B aan. Voor $c=c'$ of $n=1$ wordt $y=\frac{1}{2}h$, en de boot bereikt den oever op eenen afſtand van het landingspunt gelijk aan de halve breedte van den ſtroom.

De tijd tot den overtogt vereischt vindt men uit de formule

$$c'\partial t=\frac{\partial x\sqrt{((h-x)^2+y^2)}}{h-x},$$

welke door de vergelijking (α') verandert in

$$c'\partial z=\frac{(h-x)^{n+1}+yh^n}{h^n(h-x)},$$

en hierin voor y zijne waarde uit (γ) ſtellende komt er

$$c'\partial t=\left(\frac{h-x}{h}\right)^n+\frac{1}{2h^n}\left\{h^{2n}(h-x)^{-n}-(h-x)^n\right\}$$

$$=\left\{\frac{(h-x)^n}{2h^n}+\frac{h^n(h-x)^{-n}}{2}\right\}\partial x,$$

en deze vergelijking integrerende komt er

$$tc'=C-\frac{(h-x)^{n+1}}{2(n+1)h^n}-\frac{h^n(h-x)^{1-n}}{2(1-n)}.$$

Voor $x=0$ is $t=0$ en wij hebben dus

$$0=C-\frac{h}{2(n+1)}-\frac{h}{2(1-n)},$$

of

$$C=\frac{h}{1-n^2},$$

en dus

$$t=\frac{1}{c'}\left\{\frac{h}{1-n^2}-\frac{(h-x)^{n+1}}{2(n+1)h^n}-\frac{h^n(h-x)^{1-n}}{2(1-n)}\right\}. \quad (\delta).$$

De tijd voor den geheelen overtogt vereischt vindt men door $x=h$ te nemen, en dan komt er

$$t=\frac{1}{c'}\cdot\frac{h}{1-n^2},$$

wan-

wanneer namelijk $n < 1$ is; in het tegengestelde geval wordt t oneindig; en hieruit blijkt, dat als $c' < c$ is, men nooit op de voorgestelde wijze den anderen oever bereiken kan.

Voor $n = 1$ en $h = x$ wordt

$$t = \frac{1}{c'}\left\{\frac{h}{1-n^2} - \frac{h}{2(1-n)}\right\}$$
$$= \frac{1}{c'}\,\frac{h(1+n)}{2(1-n^2)} = \frac{1}{c'}\,\frac{h}{1-n},$$

en dus daar $n = 1$ is, is dan t oneindig. Voor $c = c'$ bereikt men dan den oever ook niet dan na eenen oneindigen tijd.

CLXII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt drie getallen te vinden, zoo dat de som der vierkanten van de twee eerste een zeshoekig getal zij, welks wortel het laatste getal zij?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. N. CALTEN, W. A. FROGER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, M. H. GODEFROI, M. DE LEON, N. J. SINGELS, J. JONKHERT *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Laten de gevraagde getallen zijn x, y en z, dan zal, daar de zeshoekige getallen, welke z tot wortel hebben, voorgesteld worden door $2z^2 - z$, de voorwaarde van het vraagstuk de vergelijking geven,

$$x^2 + y^2 = 2z^2 - z,$$

waaruit men vindt

$$z = \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2+y^2}{2} + \tfrac{1}{16}\right)}.$$

Stellende hierin

$$\frac{x^2+y^2}{2} + \tfrac{1}{16} = (n + \tfrac{1}{4})^2;$$

dan komt er na ontwikkeling

$$x^2 + y^2 = 2n^2 + 2n,$$

waarin nu voor twee der drie letters willekeurige waarden mogen genomen worden. Nemende, bij voorbeeld, $n = 4$ en $x = 6$, zoo wordt $y = 2$ en $z = 6\frac{1}{4}$, voor $n = 5$ en $x = 6$ is $y = 8$ en $z = 5\frac{1}{4}$.

CLXIII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt een getal in drie deelen te verdeelen, zoodat het trigonaal van het grootſte plus het prontk van het kleinſte gelijk aan het vierkant van het middelſte zij?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. BASSAN, J. N. CALTEN, W. A. FROGER, M. H. GODEFROI, J. JONKHERT *en* N. J. SINGELS.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stellende het gegeven getal $=a$ en deszelfs deelen x, y en z, dan hebben wij de vergelijking

$$x+y+z=a,$$

alsmede uit de voorwaarde van het vraagſtuk

$$z^2+z+\frac{x^2+x}{2}=y^2.$$

Hierin voor y zijne waarde geſteld, komt er

$$2(z^2+z)+x^2+x=2(a-x-z)^2,$$

of $$2z+x=2a^2+x^2-4ax-4az+4xz,$$

waaruit volgt

$$z=\frac{2a^2+x^2-4ax-x}{2+4a-4x}.$$

Nemende nu $x=a-n$, dan vindt men

$$z=\frac{2a^2+a^2-2an+n^2-4a^2+4an-a+n}{2+4a-4a+4n}$$

$$=\frac{n^2-a^2+2an-a+n}{2+4n}.$$

Waarin nu voor n elk willekeurig poſitief getal genomen kan worden. Zal echter z ook poſitief wezen, dan moet

$$n^2+n+2an>a^2+a$$

zijn, of

$$n+\tfrac{1}{2}(1+2a)>\sqrt{(a^2+a+\tfrac{1}{4}(1+2a)^2)},$$

dat is $$n>-\tfrac{1}{2}(1+2a)+\sqrt{(5a^2+2a+\tfrac{1}{4})} \quad . \quad . \quad (\alpha),$$

genomen worden; tevens moet $n<a$ blijven zal x poſitief zijn; en daar eindelijk uit $x=a-n$ volgt $y+z=n$, zoo zal eindelijk n nog zoodanig genomen moeten worden dat $n<z$ zij, deze grens met (α) zal dus de limieten aanwijzen waar tuſſchen n gekozen moet worden.

CLXIV.

CLXIV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Van eene harmoniſche reeks van zeven termen is het product der beide eerſte termen 20, *en dat der beide laatſten* $4\frac{4}{9}$. *Men vraagt naar de reeks?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. BADON GHYBEN, G. GRAAFLAND, J. N. CALTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, W. A. FROGER, J. JONKHERT, N. J. SINGELS, J. BASSAN, M. G. SNOER *en* M. H. GODEFROI.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Laat de reeks voorgeſteld worden door

$$\frac{a}{x-3y}, \frac{a}{x-2y}, \frac{a}{x-y}, \frac{a}{x} \text{ enz.}$$

dan zijn de beide laatſte termen $\frac{a}{x+2y}$ en $\frac{a}{x+3y}$, zoodat de beide voorwaarden van het vraagſtuk geven

$$\frac{a^2}{(x-3y)(x-2y)} = 20,$$

en

$$\frac{a^2}{(x+2y)(x+3y)} = \frac{40}{9}.$$

Deze vergelijkingen ontwikkelende, geven zij

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = \frac{a^2}{20},$$

en

$$x^2 + 5xy + 6y^2 = \frac{9a^2}{40}.$$

Deze vergelijkingen bij elkander optellende en van elkander aftrekkende, komt er

$$x^2 + 6y^2 = \frac{11a^2}{80},$$

en

$$xy = \frac{7a^2}{400}.$$

Uit de laatſte, de waarde van x in de eerſte geſteld geeft,

$$\frac{49a^4}{160000y^2} + 6y^2 = \frac{11a^2}{80},$$

of

$$y^4 - \frac{11a^2}{480}y^2 = -\frac{49a^4}{960000},$$

en hieruit volgt

$y^2 =$

$$y^2 = \frac{11a^2}{960} \pm \sqrt{\left\{\frac{121a^4}{960^2} - \frac{49a^4}{960000}\right\}},$$

$$= \frac{a^2}{960}\left\{11 \pm \frac{86}{10}\right\},$$

en dus $$y^2 = \frac{97a^2}{9600},$$

of $$y^2 = \frac{24a^2}{9600} = \frac{a^2}{400}.$$

De eerste waarde van y^2 altijd irrationale waarden voor y gevende, nemen wij alleen de laatste, en deze geeft

$$y = \pm\frac{a}{20},$$

en deze waarde gesteld in

$$xy = \frac{7a^2}{400},$$

geeft $$\pm x\frac{a}{20} = \frac{7a^2}{400},$$

of $$x = \mp\frac{7a}{20}.$$

Zoodra men dus voor a een veelvoud van 20 neemt, zal aan het vraagstuk voldaan worden. Voor $a = 20$ komt nu $y = \pm 1$ en $x \mp 7$, zoodat de reeks is

$$\frac{20}{3-7}, \frac{20}{2-7}, \frac{20}{1-7}, \frac{20}{-7}, \text{ enz.}$$

of wel $$\frac{20}{7-3}, \frac{20}{7-2}, \frac{20}{7-1}, \frac{20}{7}, \text{ enz.}$$

CLXV. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Men vraagt een driehoekig, vierhoekig en vijfhoekig getal te vinden van denzelfden wortel, en wier verschil 6 zij?

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, J. BADON GHYBEN, J. N. CALTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. DE LEON, W. A. FROGER, N. J. SINGELS, J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, E. OLIVIER DZ., F. VAN HEUKELOM, JR. *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Zij x de wortel der drie gevraagde getallen, dan is het drie-

hoe-

hoekige $\frac{x^2+x}{2}$, het vierhoekige x^2 en het vijfhoekige $\frac{3x^2-x}{2}$, en derhalve geeft het voorſtel aanleiding tot de volgende vergelijkingen

$$\frac{x^2-x}{2} = x^2 - 6,$$

en

$$x^2 = \frac{3x^2-x}{2} - 6.$$

De eerſte vergelijking geeft

$$x^2 + x = 12,$$

en daar de tweede vergelijking dezelfde uitkomst geeft, behoeven wij dezelve hier niet te gebruiken. Uit de laatſte vergelijking heeft men dadelijk

$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(12+\tfrac{1}{4})}$$
$$= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{7}{2},$$

en dus $x = 3$,

of $x = -4$.

De eerſte waarde geeft voor de begeerde getallen

10, 16 en 22,

en de tweede waarde

3, 9 en 15.

Doch van deze laatſte getallen is de wortel -3, en dan behooren deze getallen tot de reeks der figuurlijke getallen, wanneer men deze beneden de eenheid voortzet.

CLXVI. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Van een getal van drie cijfers, is de ſom der eenheden en honderdtallen gelijk aan het vierkant van het cijfer der tientallen; de ſom der cijfers van de tien- en honderdtallen is gelijk aan het cijfer der eenheden; en het verſchil der derde magten van het cijfer der honderdtallen en eenheden is gelijk aan dertienmaal dat der tientallen. Welk getal is dit?

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, J. BASSAN, F. VAN HEUKELOM, Ja., E. OLIVIER, Dz., G. BRANDSTEDER, M. G. SNOER, J. N. CALTEN, W. A. FROGER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, N. J. SINGELS, C. E. H. HOMBACH *en* M. DE LEON.

OPLOSSING van M. H. GODEFROI.

Het cijfer der eenheden $= x$, dat der tientallen $= y$, en dat der honderdtallen $= z$ ſtellende, zoo is het begeerde getal

$$x + 10y + 100z,$$

en volgens het vraagſtuk is dan verder

$$x + z = y^2,$$

$$y + z = x,$$

en $$x^3 - z^3 = 13y,$$

Uit de beide eerſte volgt door aftrekking en optelling

$$x = \frac{y^2 + y}{2},$$

en $$z = \frac{y^2 - y}{2}.$$

Deze beide waarden geſteld in

$$x^3 - z^3 = 13y,$$

geven $$(y^2 + y)^3 - (y^2 - y)^3 = 104y,$$

of na ontwikkeling $$6y^5 + 2y^3 = 104y,$$

en dus $$3y^4 + y^2 - 52 = 0,$$

waarvoor men ſchrijven kan

$$(y^2 - 4)(3y^2 + 13) = 0,$$

Deze vergelijking wordt dus voldaan door te ſtellen

$$y^2 = 4,$$

en $$y^2 = -\tfrac{13}{3}.$$

De laatſte waarde y onbeſtaanbaar makende, zoo kan men alleen $y = 2$ nemen, en hierdoor wordt $z = 1$ en $x = 3$, derhalve het getal 123.

CLXVII. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Men vraagt naar eene breuk wier teller 43 *minder zij dan de noemer, en die verkleind zijnde, een' teller geeft* 126 *minder dan den eerſten teller, en eenen noemer* 168 *minder dan den eerſten noemer?*

OPGELOST *door* A. VAN DER SWAN, M. G. SNOER, J. N. CALTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, N. J. SINGELS, J. JONKHERT, E. OLIVIER, Dz., W. A. FROGER, G. BRANDSTEDER, F. VAN HEUKELOM, Jr., M. H. GODEFROI, C. E. H. HOMBACH *en* M. DE LEON.

Op-

OPLOSSING *van* A. VAN DER SWAN.

De teller van de breuk $= x$ ſtellende; zoo is de noemer $x+43$, en de verkleinde breuk

$$\frac{x-126}{x+43-168} = \frac{x-126}{x-125},$$

en volgens het vraagſtuk moet dus

$$\frac{x-126}{x-125} = \frac{x}{x+43}$$

zijn, en hieruit volgt onmiddellijk

$$42x = 5418,$$

of $$x = 129,$$

zoodat de begeerde breuk is $\frac{129}{172}$, welke verkleind zijnde geeft $\frac{3}{4}$.

CLXVIII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men vraagt drie getallen te vinden, waarvan het product, gevoegd bij de producten twee aan twee genomen dezer getallen, drie rationale vierkanten voortbrengen?

OPGELOST *door* J. BASSAN *en* K. SMIT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten de drie getallen zijn y, x^2y en z^2y, dan is hun product $z^2x^2y^3$, en de producten twee aan twee zijn

$$x^2y^2, \quad z^2y^2 \quad \text{en} \quad z^2x^2y^2,$$

hierbij het product der getallen gevoegd zal men dus de uitdrukkingen

$$x^2z^2y^3+x^2y^2,$$
$$x^2z^2y^3+z^2y^2,$$

en $$x^2z^2y^3+z^2x^2y^2$$

tot rationale vierkanten moeten maken. Deze uitdrukkingen kunnen nu geſchreven worden onder de vormen

$$x^2y^2(z^2y+1) \quad \ldots\ldots (1),$$
$$z^2y^2(x^2y+1) \quad \ldots\ldots (2),$$

en $$x^2z^2y^2(1+y) \quad \ldots\ldots (3).$$

Elk der tweede factoren moet dus nog rationaal gemaakt worden. Men ſtelle daartoe

$$y+1 = b^2,$$

dan is $$y = b^2-1.$$

Hierdoor veranderen de irrationale factoren van (1) en (2) in

$$z^2(b^2-1)+1=z^2b^2-z^2+1,$$

en in $$x^2(b^2-1)+1=x^2b^2-x^2+1.$$

De eerſte dezer uitdrukkingen wordt een vierkant door te nemen

$$z^2=2zb,$$

of $$z=2k.$$

Want dan wordt dezelve

$$(2b^2-1)^2=(2b^2-1)^2,$$

De tweede uitdrukking wordt rationaal door te nemen

$$x=4b^2-1,$$

want dan heeft men

$$x^2b^2-x^2+1=(4b^2-3)^2b^2.$$

De uitdrukkingen (1), (2) en (3) veranderen dan in

$$(2b^2-1)^2(b^2-1)^2(4b^2-1)^2,\quad 4b^2(b^2-1)^2(4b^2-3)^2$$

en $$4b^4(b^2-1)^2(4b^2-1)^2,$$

waarin nu voor b elk willekeurig getal genomen mag worden. De gevraagde getallen worden dan voorgeſteld door

$$b^2-1,\ (b^2-1)(4b^2-1)^2 \text{ en } 4(b^2-1)b^2.$$

Voor $b=2$ zijn de getallen 3, 675 en 48

CLXIX. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

Van vier getallen is het eerſte gelijk aan de ſom der beide cijfers van het derde, het tweede is gelijk aan de ſom der beide cijfers van het vierde, de ſom van het eerſte en tweede getal is gelijk aan het derde, en hun product gelijk aan het vierde. De beide middelſte getallen zijn vierkanten; zijnde de wortel uit het eerſte gelijk aan het cijfer van de eenheden des vierden getals, en eindelijk is de wortel uit het derde plus het dubbeld der ſom van het eerſte en tweede gelijk aan het omgekeerde getal van het vierde. Welke zijn die getallen?

OPGELOST *door* M. DE LEON, C. F. JULIUS, M. G. SNOER, M. H. GODEFROI, C. E. H. HOMBACH, J. BASSAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, W. A. FROGER, J. N. CALTEN, N. J. SINGELS, G. BRANDSTEDER *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* M. DE LEON.

Zij in het derde getal de cijfer der tientallen x en dat der eenheden y, omdat dan dit getal ſlechts uit twee cijfers beſtaat is het derde getal $10x+y$, en derhalve uit de eerſte voorwaar-

de

de van het voorſtel het eerſte getal $x+y$; en daar volgens de derde voorwaarde, het tweede getal gelijk is aan het verſchil tuſſchen het derde en eerſte, is het tweede getal $10x-y-(x+y)=9x$, en derhalve volgens de vierde voorwaarde, het vierde getal $9x(x+y)$. Daar nu het tweede getal, $9x$ een vierkant moet zijn en x niet grooter dan 9 kan wezen, zoo moet dus $x=1$ of gelijk 4 of gelijk 9 zijn; en dus het tweede getal kan niet anders dan 1, 36 of 81 zijn. Maar ſtellende $x=4$ in het vierde getal voorgeſteld door $9x(x+y)$, dan komt er $144+36y$ en alzoo beſtaat dit getal uit meer dan twee cijfers, hetgeen tegen het voorſtel ſtrijdt. Men kan dus x ſlechts $=1$ nemen, en dan wordt het tweede getal $=9$. Het derde getal wordt dan $10+y$, hetwelk nu mede een vierkant moetende zijn en y niet grooter dan 9 mogende wezen, zoo kan men y niet anders dan $=6$ nemen, het derde getal is dus 16, het tweede 9, het eerſte $1+6=7$ en het vierde $9\times 7=63$.

AANMERKING. Door gebruik te maken van de voorwaarden dat x en y niet grooter dan 9 mogen zijn, heeft men de beide laatſte voorwaarden van het vraagſtuk ongebruikt kunnen laten.

CLXX. VOORSTEL,

Door M. DE LEON.

Men vraagt de waarde te vinden van x en y uit de vergelijkingen $x^4-y\,(y-1)^2=81$ *en* $4x^4-4(y^2-y)^2-(2y-1)^2-4x^2=287$?

OPGELOST *door* M. DE LEON, J. BADON GHYBEN, J. N. CALTEN, J. BASSAN, J. JONKBERT, C. E. H. HOMBACH, M. G. SNOER, N. J. SINGELS, M. H. GODEFROI, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* W. A. FROGER.

OPLOSSING *van* M. DE LEON.

De eerſte vergelijking geeft bij ontwikkeling

$$x^4-y^4+2y^3-y^2=81 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

en de tweede

$$4x^4-4y^4+8y^3-8y^2+4y-1-4x^2=287 \quad . \quad (2).$$

De vergelijking (1) met 4 vermenigvuldigende en er (2) van aftrekkende, komt er

$$4y^2-4y+4x^2=36,$$

of

$$x^2-y+y^2=9. \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

De vergelijking (1) als in het eerste lid het verschil van twee vierkanten voorstellende, kan geschreven worden onder den vorm

$$(x^2 - y(y-1))(x^2 + y(y-1)) = 81,$$

of $$(x^2 - y^2 + y)(x^2 + y^2 - y) = 81,$$

deze vergelijking door (2) gedeeld geeft dus

$$x^2 - y^2 + y = 9,$$

en daar nu ook

$$x^2 + y^2 - y = 9$$

is, zoo vindt men uit de som dezer laatste vergelijkingen

$$x^2 = 9,$$

of $$x = \pm 3.$$

Deze waarde in (3) gesteld, geeft

$$y^2 - y = 0 = y(y-1),$$

en dus $$y = 0,$$

en $$y = 1.$$

Men mag dus in de voorgestelde vergelijkingen nemen

$$x = 3 \text{ en } y = 0,$$

of $$x = 3 \text{ en } y = 1,$$

of $$x = -3 \text{ en } y = 0,$$

of eindelijk $$x = -3 \text{ en } y = 1.$$

CLXXI. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt de som der twee volgende reeksen

$$Sin.\,x + Sin.\,3x + Sin.\,5x + \ldots Sin.\,(2n-1)x$$

en $$Cos.\,x + Cos.\,3x + Cos.\,5x + \ldots Cos.\,(2n-1)x\,?$$

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, J. BADON GHYBEN, W. A. FROGER, J. N. CALTEN, J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Zij de som der eerste reeks $= S$, dan verkrijgt men door al de termen dezer reeks met $Sin.\,x$ te vermenigvuldigen

$$S\,Sin.\,x = Sin.^2\,x + Sin.\,x\,Sin.\,3x + Sin.\,x\,Sin.\,5x \ldots + Sin.\,x\,Sin.\,(2n-1)x.$$

Daar nu in het algemeen $2\,Sin.\,a\,Sin.\,b = Cos.\,(a-b) - Cos.\,(a+b)$ is, hebben wij:

Stellende $a = b = x$,

$$2\,Sin.\,x\,Sin.\,x = 1 - Cos.\,2x.$$

Stel-

Stellende $a = x$, $b = 3x$,

$$2\,Sin.\,x\,Sin.\,3x = Cos.\,2x - Cos.\,4x.$$

Stellende $a = x$, $b = 5x$,

$$2\,Sin.\,x\,Sin.\,5x = Cos.\,4x - Cos.\,6x,$$

enz.

$$2\,Sin.\,x\,Sin.\,(2n-1)x = Cos.\,(2n-2)x - Cos.\,2n.$$

Al deze vergelijkingen optellende, zoo wordt de som der eerste leden $2\,S\,Sin.\,x$, en daar in de tweede leden de tweede term van eene voorgaande vergelijking telkens de eerste der volgende vernietigt, vindt men

$$2\,S.\,Sin.\,x = 1 - Cos.\,2nx$$
$$= 2\,Sin^2.\,nx,$$

en dus
$$S = \frac{Sin^2.\,nx}{Sin.\,x}.$$

Om de som S' der tweede reeks te vinden, vermenigvuldigen wij weder al de termen met $Sin.\,x$, en dan komt er

$$S'\,Sin.\,x = Sin.\,x\,Cos.\,x + Sin.\,x\,Cos.\,3x + Sin.\,x\,Cos.\,5x + \ldots + Sin.\,x\,Cos.\,(2n-1)x.$$

En daar nu wederom in het algemeen

$$2\,Sin.\,b\,Cos.\,a = Sin.\,(a+b) - Sin.\,(a-b)$$

is, hebben wij wederom

$$2\,Sin.\,x\,Cos.\,x = Sin.\,2x,$$
$$2\,Sin.\,x\,Cos.\,3x = Sin.\,4x - Sin.\,2x,$$
$$2\,Sin.\,x\,Cos.\,5x = Sin.\,6x - Sin.\,4x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\,Sin.\,x\,Cos.\,(2n-1)x = Sin.\,2nx - Sin.\,2(n-1)x.$$

De som dezer vergelijkingen geeft dan nu weder

$$2\,S'\,Sin.\,x = Sin.\,2nx,$$

of
$$S' = \tfrac{1}{2}.\frac{Sin.\,2nx}{Sin.\,x}.$$

I Aanmerking. De hier gevondene uitkomsten zijn dezelfde, welke uit de reeksen in de oplossing van het *Voorstel* LXXII van het derde deel der *Verzameling van Wiskundige Voorstellen*, als een bijzonder geval zijn afgeleid, doch de hier gevolgde weg is veel korter en maakt het onnoodig om voor de hier behandelde reeksen de meer samengestelde oplossing van genoemd voorstel te gebruiken.

II AANMERKING van den Heer BADON GHYBEN. Indien men de reekſen S en S′ in elkander deelt, komt er

$$\frac{S}{S'} = \frac{Sin.\ nx}{Cos.\ nx} = Tang.\ nx.$$

Neemt men dus, bij voorbeeld, $n = 3$, dan komt er

$$Tang.\ 3x = \frac{Sin.\ x + Sin.\ 3x + Sin.\ 5x}{Cos.\ x + Cos.\ 3x + Cos.\ 5x},$$

en zoo voor al de overige veelvouden van x.

CLXXII. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen en te conſtrueren, wanneer gegeven zijn den tophoek alsmede de ſtralen der in- en omgeſchrevene cirkels?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, J. BADON GHYBEN, W. A. FROGER, C. E. H. HOMBACH, J. BASSAN, J. N. CALTEN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat ABC, *Fig.* 62, den begeerden driehoek zijn, waarin *hoek* $BAC = \alpha$ gegeven is; zij verder O en O′ de middelpunten des om- en ingeſchreven cirkels, welker ſtralen wij door R en r voorſtellen, en nemen wij $BC = x$, $AC = y$ en $AB = z$, alsmede $ABC = \phi$ en $ACB = \psi$. De lijnen BO en OC getrokken hebbende is blijkbaar *hoek* $BAC = \frac{1}{2}$ *hoek* BOC, en daar $Bp = OC$ *Sin.* p OC is, zoo is dan ook

$$BC = 2\,B\,p = 2\,OC\ Sin.\ EOC,$$

of

$$x = 2\,R\ Sin.\ \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Trekkende nu de lijnen O′B en O′C alsmede de loodlijn O′ q, dan is

$$BC = Bq + qC = O'q\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\phi + O'q\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\psi,$$

of

$$x = r\,(Cot.\ \tfrac{1}{2}\phi + Cot.\ \tfrac{1}{2}\psi),$$

$$= r\left(\frac{Cos.\ \frac{1}{2}\phi}{Sin.\ \frac{1}{2}\phi} + \frac{Cos.\ \frac{1}{2}\psi}{Sin.\ \frac{1}{2}\psi}\right),$$

$$= r\,\frac{Sin.\ \frac{1}{2}(\phi+\psi)}{Sin.\ \frac{1}{2}\phi\ Sin.\ \frac{1}{2}\psi}.$$

Maar nu is $\phi + \psi = 180 - \alpha$, dus $Sin.\ \frac{1}{2}(\phi+\psi) = Cot.\ \frac{1}{2}\alpha$; derhalve

$$x = r$$

$$x = r\,\frac{Cos.\,\frac{1}{2}\alpha}{Sin.\,\frac{1}{2}\phi\,Sin.\,\frac{1}{2}\psi},$$

of ook $$Sin.\,\tfrac{1}{2}\phi\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\psi = \frac{r}{x}\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha,$$

en daar nu

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}\phi\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\psi = \tfrac{1}{2}\,Cos.\,\tfrac{1}{2}(\phi-\psi) - \tfrac{1}{2}\,Cos.\,\tfrac{1}{2}(\phi+\psi)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,Cos.\,\tfrac{1}{2}(\phi-\psi) - \tfrac{1}{2}\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha,$$

zoo hebben wij

$$\frac{r}{x}\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\,Cos.\,\tfrac{1}{2}(\phi-\psi) - \tfrac{1}{2}\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha,$$

en dus $$Cos.\,\tfrac{1}{2}(\phi-\psi) = \frac{2r}{x}\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha + Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha,$$

of wel hierin voor x zijne waarde uit (1) gesteld, komt er

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}(\phi-\psi) = \frac{r}{R}\,\frac{Cos.\,\frac{1}{2}\alpha}{Sin.\,\alpha} + Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$= \frac{r}{2R\,Sin.\,\frac{1}{2}\alpha} + Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Uit deze vergelijking nu $\phi-\psi$ gevonden zijnde, en $\phi+\psi = 180-\alpha$ mede bekend zijnde, zijn dus ϕ en ψ mede bekend, en daar bovendien de vergelijking (1) eene der zijden geeft, kunnen de overigen volgens de bekende regels gevonden worden.

Door constructie kan nu de driehoek op de volgende wijze bepaald worden. Met den straal R van den omgeschreven cirkel beschrijve men den cirkel AFCB, en uit een willekeurig punt F van den omtrek den hoek BFC $= \alpha$ gemaakt hebbende, is de zijde BC over den tophoek gevonden. Men trekke dan verder evenwijdig aan BO de lijn $O'n$ op den afstand $O'q = r$, deele den boog BC in E midden door, en nu de lijnen $EO' = EO'' = BE = BC$ trekkende, zoo zijn de middelpunten O' en O'' der ingeschrevene cirkels van de begeerde driehoeken BAC en $BA'C$ gevonden. Dat deze middelpunten op de lijn $O'n\,O''$ gelegen moeten zijn is blijkbaar, even zoo dat de lijnen EA en EA' de hoeken bij A en A' midden door deelen, zoo men nu dus kan aanwijzen dat BO' den hoek ABC midden door deelt, is het gestelde bewezen; daartoe verlenge men BO' tot in G, dan volgt uit de gelijkheid der hoeken EBG en $BO'E$,

$$boog\,EG = boog\,BE + boog\,AG,$$

of

of $\quad boog\,AG = boog\,EG - boog\,BE,$
$= boog\,EG - boog\,EC,$
$= boog\,CG,$

en de *hoek* $ABG = hoek\,GBO$, alzoo deelt werkelijk BO' den *hoek* B midden door. Door dan eindelijk EO' en EO'' tot in A en A′ te verlengen zijn dan de driehoeken ABC en BCA′ gevonden.

GEVOLGEN. De afstand OO' der middelpunten van de in- en omgeschreven cirkels vindt men nu op de volgende wijze:

De driehoek OEO' geeft

$$OO'^2 = OE^2 + O'E^2 - 2.OE \times En,$$

maar $\quad O'E^2 = BE^2 = EF \times Ep = 2\,OE \times Ep,$

dus $\quad OO'^2 = OE^2 + 2\,OE \times Ep - 2\,OE \times En;$
$= OE^2 + 2\,OE\,(Ep - En),$
$= OE^2 - 2\,OE \times r,$

of eindelijk $\quad OO'^2 = R^2 - 2Rr.$

Men kan nu ook schrijven

$$OO'^2 = R\,(R - 2r);$$

en daar het eerste lid positief is, zoo moet het tweede dit ook zijn, en hieruit volgt: dat de straal van den omgeschreven cirkel eens driehoeks altijd grooter is dan de middellijn van den ingeschreven cirkel. Deze vergelijking geeft eindelijk de voorwaarde te kennen welke er voor R en r moet bestaan, zal het voorstel mogelijk zijn.

CLXXIII. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen wanneer gegeven zijn de loodlijnen uit het middelpunt van den omgeschreven cirkel op de zijden nedergelaten?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, J. BADON GHYBEN, J. N. CALTEN, W. A. FROGER, C. E. H. HOMBACH, J. BASSAN, J. JONKHERT *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat ABC, *Fig.* 63, den driehoek zijn waarin O het middelpunt van den omgeschreven cirkel is, dan zullen de loodlijnen Om, On en Op de zijden in twee gelijke deelen verdeelen; trekkende dan de lijnen OB, OC en pn, zoo is *hoek* $pOn = 180 - A$, en

stel-

ſtellende $Om = a$, $On = b$ en $Op = c$, zoo heeft men uit den driehoek pOn

$$pn^2 = pO^2 + On^2 + 2pO \times nO\, Cos.\, A,$$

en daar $pn = \frac{1}{2}BC = Bm$ is, zoo wordt deze vergelijking

$$Bm^2 = b^2 + c^2 + 2bc\, Cos.\, A \quad \ldots \quad (1).$$

Maar nu is $Bm = mO\, Tang.\, BOm = a\, Tang.\, BOm$,
of daar $\frac{1}{2}BOC = BAC = BOm = A$
is, hebben wij $Bm = a\, Tang.\, A$.
Hetwelk in (1) geſteld, geeft

$$a^2\, Tang^2.\, A = b^2 + c^2 + 2bc\, Cos.\, A,$$

of $a^2\, Sin^2.\, A = Cos^2.\, A\,(b^2 + c^2 + 2bc\, Cos.\, A)$,
en dus $a^2(1 - Cos^2.\, A) = Cos^2.\, A\,(b^2 + c^2) + 2bc\, Cos^3\, A$,
en eindelijk $Cos^3\, A + \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2bc}\, Cos^2.\, A - \frac{a^2}{2bc} = 0 \quad \ldots \quad (2)$.

Uit welke vergelijking nu de hoek A gevonden kan worden, en deze eens bekend zijnde, worden nu de overige deelen gemakkelijk bepaald; en wel te meer omdat men voor de overige hoeken uit (2) gemakkelijk nog de volgende vergelijkingen kan afleiden door A in B of C, a in b of c, b in c of a en c in a of b te veranderen; men heeft dan

$$Cos^3.\, B + \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2ac}\, Cos^2.\, B - \frac{b^2}{2ac} = 0,$$

en $$Cos^3.\, C + \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2ba}\, Cos^2.\, C - \frac{c^2}{2ab} = 0.$$

De ſtraal R van den omgeſchreven cirkel vindt men door in (2) voor $Cos.\, A$ te ſchrijven

$$Cos.\, A = Cos.\, BOm = \frac{a}{R},$$

dan vindt men na herleiding

$$R^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\, R - 2abc = 0 \quad \ldots \quad (3).$$

AANMERKING. De vergelijking (2) heeft altijd eene beſtaanbare wortel tuſſchen 0 en 1, want voor $Cos.\, A = 0$ wordt het eerſte lid der vergelijking negatief, en voor $Cos.\, A = 1$ gaat hetzelve over in $(b + c)^2$, en is dus poſitief. Er is dus altijd eene regtſtreekſche oplosſing voor het vraagſtuk, hoedanig ook de gegevens mogen zijn. Voor $Cos.\, A = -1$ wordt het eerſte lid der vergelijking (2), $(b - c)^2$ en dus wederom poſitief, er beſtaat

dan

dan altijd nog eene negatieve waarde van *Cos.* A, dat is, eenen ſtompen hoek, welke mede aan de vraag voldoet. Eindelijk voor eene zeer groote negatieve waarde van *Cos.* A zal het tweede lid der vergelijking (2) wederom negatief worden, en dat leert alzoo dat de derde wortel grooter dan — 1 zal wezen, en alzoo eene onbeſtaanbare waarde aan A zal verſchaffen.

Voor $b = c$ wordt de driehoek gelijkbeenig en de vergelijking (3) wordt alsdan

$$R^3 - (a^2 + 2b^2)R - 2ab^2 = 0,$$

of $$R(R^2 - a^2) - 2b^2(R + a) = 0,$$

en dus $$(R + a)\{R(R - a) - 2b^2\} = 0.$$

Aan deze vergelijking wordt dan voldaan door $R = -a$, en door

$$R^2 - Ra - 2b^2 = 0,$$

of door $$R = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(2b^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}.$$

Welke laatſte uitdrukking ſlechts eene poſitieve waarde voor R geeft.

CLXXIV. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen als gegeven zijn de ſtralen der drie cirkels welken eene van de zijden uitwendig en de twee andere inwendig aanraken?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, J. N. CALTEN, J. JONKHERT, J. BADON GHYBEN, J. BASSAN *en* W. A. FROGER.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat ABC (*Fig.* 64) de begeerde driehoek zijn, en O, O′ en O″ de middelpunten der drie cirkels, waarvan de ſtralen R, R′ en R″ gegeven zijn, ſtellende nu verder de onbekende zijden $BC = x$, $AC = y$ en $BA = z$ en $x + y + z = 2p$, alsmede de ſtraal van den ingeſchreven cirkel $= r$ en den inhoud van den driehoek $= S$, dan heeft men de vergelijkingen

$$S = pr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

en $$S = \sqrt{\{p(p - x)(p - y)(p - z)\}} \quad \ldots \quad (2).$$

Vereenigende nu het middelpunt O met de drie hoekpunten A, B en C door regte lijnen, en trekkende de loodlijnen OE, OD en OF, dan is

$$\textit{drieh.}\,ABC = \textit{drieh.}\,ABO + \textit{drieh.}\,AOC - \textit{drieh.}\,BCO,$$

$$= \tfrac{1}{2}AB \times EO + \tfrac{1}{2}AC \times OF - \tfrac{1}{2}BC \times OD,$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(AB + AC - BC)OE,$$

of $$s = (p - x)R \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Op dezelfde wijze zal men vinden

$$s = (p - y)R' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

en $$s = (p - z)R'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Deze vergelijkingen geschreven onder den vorm

$$\frac{1}{R} = \frac{p - x}{s},$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{p - y}{s},$$

en $$\frac{1}{R''} = \frac{p - z}{s},$$

geven door optelling

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{3p - (x + y + z)}{s}$$

$$= \frac{p}{s},$$

en hierin voor het laatste lid zijne waarde uit (1) stellende, komt er

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Eene merkwaardige betrekking tusschen den straal van den ingeschreven cirkel en van de uitwendig rakende cirkels; men vindt uit dezelve

$$r = \frac{RR'R''}{RR' + RR'' + R'R''} \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

De vergelijkingen (3), (4) en (5) met elkander vermenigvuldigende, komt er

$$s^3 = (p - x)(p - y)(p - z)RR'R'',$$

en hierin uit (2) de waarde van het product der factoren $(p - x)$ *enz.* stellende, komt er

$$s = \frac{1}{p}RR'R'',$$

of door (1)

$$s^2 = rRR'R'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Eene niet minder merkwaardige betrekking tusschen den inhoud

en de in- en uitwendig rakende cirkels, het eerst door LHUILIER bekend gemaakt.

In deze vergelijking voor r zijne waarde uit (7) gesteld, komt er

$$s^2 = \frac{R^2 R'^2 R''^2}{RR' + RR'' + R'R''} \quad \ldots \quad (9).$$

De waarde van s uit deze vergelijking in (1) gesteld geeft

$$pr = \frac{RR'R''}{\sqrt{(RR' + RR'' + R'R'')}},$$

en hierin voor r zijne waarde uit (7), zoo heeft men

$$p = \sqrt{(RR' + RR'' + R'R'')} \quad \ldots \quad (10).$$

Eindelijk in (3), (4) en (5) voor s zijne waarde uit (1) gesteld hebbende, vindt men

$$p - x = p\frac{r}{R},$$

$$p - y = p\frac{r}{R'},$$

en $$p - z = p\frac{r}{R''},$$

of $$x = p\frac{R - r}{R},$$

$$y = p\frac{R' - r}{R'},$$

en $$z = p\frac{R'' - r}{R''}.$$

In deze laatste vergelijkingen voor p zijne waarde uit (10) gesteld, is dan

$$x = \frac{R - r}{R}\sqrt{\{RR' + RR'' + R'R''\}},$$

$$y = \frac{R' - r}{R'}\sqrt{\{RR' + RR'' + R'R''\}},$$

en $$z = \frac{R'' - r}{R''}\sqrt{\{RR' + RR'' + R'R''\}}.$$

GEVOLGEN. Laat men uit de middelpunten O, O' en O'' loodlijnen OC, OE, O'C', O'E', *ens.* neder, dan heeft men blijkbaar $AD'' = AE''$, $AD' = AF'$, *ens.* Verder is dan ook

AE

$AE = AB + BE = AB + BD$ en $AF = AC + CD$, en deze beide vergelijkingen optellende, komt er

$$AE + AF = 2\,AE = AB + AC + BC,$$

of $$AE = p = \tfrac{1}{2}(AB + AC + BC).$$

Op dezelfde wijze vindt men dan

$$BF' = CE'' = p.$$

Trekt men nu door de punten O′ en O″ eene regte lijn tot dat zij de loodlijn OF in X ontmoet, dan zal men uit de gelijkvormige driehoeken AD′O′ en AFX hebben

$$\frac{AD'}{D'O'} = \frac{AF}{FX}.$$

Maar $AF = p$, $AD' = AF' = BF' - AB = p - z$ en $D'O' = R'$ zijnde, zoo wordt deze vergelijking

$$\frac{p - z}{R'} = \frac{p}{FX},$$

of $$FX = \frac{p}{p - z} . R',$$

en daar wij reeds boven gevonden hebben

$$\frac{p - z}{p} = \frac{r}{R''},$$

zoo hebben wij

$$FX = \frac{r}{R''} R',$$

of voor r zijne waarde uit (7) ſtellende

$$FX = \frac{RR' + RR'' + R'R''}{R},$$

$$= R' + R'' + \frac{R'}{R} R''.$$

Deze uitkomsten geven nu aanleiding tot de volgende

CONSTRUCTIE. Men beſchrijve namelijk met eenen ſtraal $OF = R$ den cirkel EDF, en trekke door het middelpunt O eene onbepaalde regte lijn OX; op deze lijn trekke men de loodlijn E″F, make vervolgens $FM = R'$, $MN = R''$ en $NX = \frac{R'}{R} R''$, alsdan is $FX = R' + R'' + \frac{R'}{R} R''$. Op OF beſchrijve men eenen halven cirkel ſnijdende de loodlijn E″F in A, alsdan is $AF =$

$OF \times FX = R(R' + R'' + \frac{R'}{R}R') = RR' + RR'' + R'R''$ en derhalve $AF = p$. Hierdoor is dan de top A van den driehoek geconſtrueerd, trekkende nu de raaklijn AE zoo is ook de rigting der zijde AB gevonden. Uit M de loodlijn O′M oprigtende, zoo is het ſnijpunt O′ met AX het middelpunt van den cirkel E′D′F′, aangezien $FM = O'D' = R'$ is. Trekkende dan de lijn OO′, zoo is het hoekpunt C gevonden, en door C de raaklijn CDB trekkende, zoo is ook het derde hoekpunt B bekend.

CLXXV. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Indien men in de twee ſcherpe hoeken van eenen regthoekigen driehoek cirkels beſchrijft, welke een der zijden en de verlengde van de twee andere zijden aanraken, dan vindt men: 1°. dat de ſom der ſtralen van deze cirkels gelijk is aan de hypotenuſa; 2°. dat de inhoud van den driehoek uitgedrukt wordt door het product der ſtralen. Men vraagt naar het bewijs?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, J. N. CALTEN, H. J. BADON GHYBEN, W. A. FROGER, J. JONKHERT, J. BASSAN *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Zij ABC (*Fig.* 65) eenen regthoekigen driehoek en de cirkels *pnm* en *qrs* uit de punten O′ en O beſchreven, de cirkels welke de beide regthoekszijden uitwaards en de hypotenuſa binnenwaards aanraken, en laten verder de loodlijnen O*q*, O*r*, O*s*, O′*p*, O′*n* en O′*m* getrokken zijn, dan zal men hebben

$$Cp = AC + Ap,$$

maar $Ap = An,$

dus $Cp = AC + An.$

Om dezelfde reden is $Cm = BC + Bn,$

en alzoo $Cp + Cm = AC + BC + AB.$

Maar nu is ook $Cp = Cm,$

dus $Cm = \frac{1}{2}(AC + BC + AB).$

Op dezelfde wijze bewijst men

$$BS = \frac{1}{2}(AC + BC + AB),$$

of $Cm = BS,$

om dezelfde reden is dan ook $Bq = Cp = Cm.$

Ver-

Verder heeft men

$$BC = Cm - Bm = Bq - Bm$$
$$= Bq - Bn = nq.$$

Maar $nq = nA + qA = O'p + Or$;

waardoor het eerſte gedeelte der ſtelling bewezen is.

Voor het tweede gedeelte heeft men nu

$$O'p = pA = Cp - AC = \tfrac{1}{2}(AB + AC + BC) - AC$$
$$= \tfrac{1}{2}\{BC + (AB - AC)\},$$

en $$Or = Aq = Bq - AB = \tfrac{1}{2}(AB + AC + BC) - AB$$
$$= \tfrac{1}{2}\{BC - (AB - AC)\}.$$

De waarde van $O'p$ en Or met elkander vermenigvuldigende, komt er

$$O'p \times Or = \tfrac{1}{4}\{BC^2 - (AB - AC)^2\}$$
$$= \tfrac{1}{4}\{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB \times AC\}.$$

Maar de regthoekige driehoek ABC geeft $BC^2 = AB^2 + AC^2$, dus verandert de voorgaande vergelijking in

$$O'p \times Or = \tfrac{1}{2}AB \times AC = \textit{inh. drieh.}\ ABC.$$

CLXXVI. VOORSTEL.

Door G. GRAAFLAND.

Men vraagt naar de zijden van eenen regthoekigen driehoek wanneer bekend is dat deze zijden eene rekenkunstige reeks vormen wier ſom $= 24$ *is, en dat de ſom der vierkanten van de zijden* $= 200$ *is?*

OPGELOST *door* G. GRAAFLAND, J. BADON GHYBEN, J. BASSAN, J. JONKHERT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. DE LEON, N. J. SINGELS, J. P. OTT, G. BRANDSTEDER, F. VAN HEUKELOM JR., J. WARNSINCK, B. LUBBERS, J. M. VAN VOLLENHOVEN, N. BARENDS, M. SALOMO, C. VAN SCHAICK, J. J. GASTMAN, M. G. SNOER *en* M. H. GODEFROI.

OPLOSSING *van* G. GRAAFLAND.

Laten de drie zijden voorgeſteld worden door x, y en z, dan hebben wij vooreerst

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \ldots\ldots (1),$$

daar de zijden eene rekenkunstige reeks vormen is ook

$$x - y = y - z \quad \ldots\ldots (2).$$

En daar nu nog de ſom der zijden gegeven is, hebben wij

$$x+y+z=24 \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Uit de vergelijking (2) heeft men

$$2y=x+z,$$

hetwelk in (3) geſteld, geeft

$$3y=24,$$

of $y=8$,

en dus uit (3) $x+z=16$.

Maar uit (1) heeft men

$$z^2-x^2=y^2=64,$$

en deze vergelijking gedeeld door de voorgaande, geeft

$$z-x=4;$$

en daar ook $z+x=16$

is, wordt door optelling en afrekking gevonden

$$z=10,$$

en $x=6$.

Aanmerking *van* J. Badon Ghyben. Er is in het voorſtel eene overtollige voorwaarde opgegeven, daar er ſlechts drie onbekenden zijn, terwijl men de vier volgende voorwaarden heeft. 1°. De ſom van de vierkanten der twee regthoekzijden is gelijk aan die der ſchuinſche zijde. 2°. Het verſchil der beide regthoekzijden is gelijk aan dat van de ſchuinſche zijde met de grootſte regthoekzijde. 3°. De ſom der zijden is gegeven, en 4°. de ſom der vierkanten van de zijden. Doch daar de gegeven naar behooren zijn opgegeven om aan deze vier voorwaarden te voldoen, zoo zal men altijd dezelfde uitkomst verkrijgen, van welke drie der vier gegevene voorwaarden men ook gebruik maakt.

CLXXVII. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Men vraagt naar drie op elkander volgende getallen waarvan de ſom door vijf en de ſom der vierkanten door 7 deelbaar zij?

Opgelost *door* J. Bassan, J. Badon Ghyben, J. Jonkhert, B. Lubbers, J. Warnsinck, M. H. Godefroi, J. P. Ott, M. G. Snoer, N. J. Singels, G. Brandstederr, F. van Heukelom Jr., W. J. C. Rammelman Elsevier, C. van Schaick, J. M. van Vollenhoven, M. de Leon *en* J. J. Gastman.

Oplossing *van* J. Bassan.

Laten de drie getallen zijn $5x-1$, $5x$ en $5x+1$, dan bevant-

antwoorden zij dadelijk aan de eerste voorwaarde. De som hunner vierkanten is

$$75x^2+2,$$

welke door 7 gedeeld zijnde, geeft

$$10x^2+\frac{5x^2+2}{7},$$

of wel $11x^2-\frac{2x^2-2}{7}=11x^2-\frac{2(x-1)(x+1)}{7}$.

Daar nu x een geheel getal moet zijn, zoo zal een der factoren $x-1$ of $x+1$ door 7 deelbaar moeten wezen; stellende derhalve $x-1=7p$, dan wordt de laatste uitdrukking

$$11(7p+1)^2-2p(7p+2)=525p^2+150p+11.$$

Nemende dan nu voor p eene willekeurige waarde, dan zal men telkens de overeenkomstige getallen, die aan de vraag voldoen, kunnen vinden.

Bij voorbeeld,

voor $p=0$ wordt $x=1$ en de gevraagde getallen 4, 5 en 6,
voor $p=1$ wordt $x=8$ en de gevraagde getallen 39, 40 en 41.

Stelt men daarentegen $x+1=7q$ dan vindt men wederom eene andere reeks van getallen, die even eens aan de vraag voldoen.

CLXXVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar vier op elkander volgende getallen, waarvan de som door vijf en de som der vierkanten door zeven deelbaar zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. BADON GHYBEN, J. P. OTT, M. H. GODEFROI, J. JONKHERT, M. G. SNOER, G. BRANDSTEDER, M. DE LEON, B. LUBBERS, J. WARNSINCK, C. VAN SCHAICK *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten de getallen zijn x, $x+1$, $x+2$ en $x+3$ dan is hunne som $4x+6=5+(4x+1)$, en stellende nu $4x+1=5p$, dan wordt

$$x=\frac{5p-1}{4}=p+\frac{p-1}{4},$$

zoodat stellende weder $p=4q+1$, dan is

$$x=5q+1,$$

en de getallen kunnen voorgesteld worden door

$5q+1$, $5q+2$, $5q+3$ en $5q+4$.

De som der vierkanten dezer getallen is

$$100q^2+100q+30,$$

hetwelk door 7 gedeeld zijnde, geeft

$$14q^2+14q+4+\frac{2q^2+2q+2}{7},$$

$$=14q^2+14q+4+\frac{2(q^2+q+1)}{7}.$$

De factor q^2+q+1 moet nu door 7 deelbaar worden; men neme daartoe $q^2+q+1=7m$ en neme $q=n+2$, dan verandert de voorgaande vergelijking in

$$7m=n^2+5n+7,$$

of

$$m=1+\frac{n(n+5)}{7}.$$

Nemende derhalve dan nu voor n of $n+5$ een veelvoud van 7, zoo zal ook aan de tweede voorwaarde voldaan worden. Bij voorbeeld, door te nemen $n=0$ is $q=2$, en de getallen zijn 11, 12, 13 en 14, door te nemen $n=7$ is $q=9$, en de getallen zijn 46, 47, 48 en 49, *enz.*

Stelt men nu $n+5=7$ of $n=2$, dan worden de getallen

36, 37, 38 en 39,

of wel $n+5=14$ geeft $n=9$ en $q=11$ en de getallen

56, 57, 58 en 59, *enz.*

CLXXIX. VOORSTEL.

Door M. G. SNOER,

Een kapitaal van a guldens moet met den interest van b ten honderd in n jaren worden afgelost, zoodanig dat ieder jaar even veel aan kapitaal en interest te zamen genomen, afgedaan wordt. Men vraagt hoe veel hiertoe jaarlijks moet betaald worden?

OPGELOST *door* J. BASSAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, N. J. SINGELS, J. JONKHERT, M. DE LEON, J. P. OTT, J. WARNSINCK *en* G. BRANDSTEDER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

De interest b ten honderd zijnde, zoo zal het kapitaal en de interest aan het einde van het jaar bedragen $\frac{a(100+b)}{100}$, is nu de

jaar-

jaarlijksche aflosſing $= x$, dan blijft er aan het einde van het eerſte jaar over

$$\frac{a(100+b)}{100} - x;$$

hetwelk bij het einde van het tweede jaar aangroeit tot

$$\left(\frac{a(100+b)}{100} - x\right)\frac{100+b}{100} = a\left(\frac{100+b}{100}\right)^2 - x\left(\frac{100+b}{100}\right),$$

of na de aflosſing

$$a\left(\frac{100+b}{100}\right)^2 - x\frac{100+b}{100} - x,$$

Aan het einde van het derde jaar heeft men dan weder

$$a\left(\frac{100+b}{100}\right)^3 - x\left(\frac{100+b}{100}\right)^2 - x\frac{100+b}{100},$$

of na de aflosſing

$$a\left(\frac{100+b}{100}\right)^3 - x\left(\frac{100+b}{100}\right)^2 - x\frac{100+b}{100} - x.$$

Zoodat daar, na de aflosſing van het n-de jaar er niets moet overblijven, men hebben zal

$$a\left(\frac{100+b}{100}\right)^n - x\left(\frac{100+b}{100}\right)^{n-1} - x\left(\frac{100+b}{100}\right)^{n-2} \ldots - x = 0;$$

of ſtellende

$$\frac{100+b}{100} = q;$$

zoo heeft men

$$aq^n - x(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots . 1) = 0.$$

De tweede factor van den tweeden term in het eerſte lid de ſom eener meetkunstige reeks voorſtellende, waarvan de rede q en de eerſte term $= 1$ is, zoo kan men voor deze vergelijking ſchrijven

$$aq^n - x\frac{q^n - 1}{q - 1} = 0,$$

of

$$x = aq^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}.$$

Waarin nu voor q zijne waarde geſteld kan worden.

Voor een zeer groot aantal jaren, of voor eene zeer groote

waarde van n kan men, zonder veel van de waarheid af te wijken, voor $q^n - 1$ ſchrijven q^n, en alsdan is

$$x = a(q-1) = a\frac{b}{100}.$$

Hetgeen aanwijst dat men alsdan enkel de jaarlijkſche interest te voldoen heeft, doch deze vergelijking is dan ook alleen volkomen juist, als men n oneindig ſtelt, dat is, als men de ſchuld nooit wil afdoen.

CLXXX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men begeert eenen regthoekigen driehoek te berekenen, als bekend is de lengte der lijn, welke een der ſcherpe hoeken midden door deelt, genomen tot aan de ſnijding met de loodlijn uit den anderen ſcherpen hoek op de hypotenuſa gerigt, alsmede de lengte van deze loodlijn?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN *en* M. H. GODEFROI.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Zij in *Fig.* 66, ABC den gevraagden driehoek, waarin BE den hoek ABC midden door deelt, en AE loodregt op AB getrokken is; dan is $BE = a$ en $AE = b$ gegeven. De driehoeken DCB en AEB beide regthoekig zijnde en de gelijke ſcherpe hoeken ABE en DBC hebbende, zoo zijn ook de hoeken BDC en AEB aan elkander gelijk, en daar ook *hoek* BDC = *hoek* ADE *is*, zoo zijn de hoeken ADE en DEA aan elkander gelijk, en derhalve $AD = AE$.

Verder is de zijde AB terſtond bekend, doordien men heeft

$$AB^2 = BE^2 - AE^2 = a^2 - b^2.$$

Omdat de hoek B door BD midden door gedeeld *is*, heeft men de evenredigheid

$$AD : DC = AB : BC.$$

Stellende dan $BC = x$, zoo is $AC = \sqrt{(BA^2 - BC^2)}$, of

$$AC = \sqrt{(a^2 - b^2 - x^2)},$$

en derhalve $$DC = \sqrt{(a^2 - b^2 - x^2)} - b,$$

en de voorgaande evenredigheid geeft

$$b : \sqrt{(a^2 - b^2 - x^2)} - b = \sqrt{(a^2 - b^2)} : x,$$

of

of $xb = \sqrt{(a^2-b^2)}\sqrt{(a^2-b^2-x^2)} - b\sqrt{(a^2-b^2)}$,

waaruit volgt

$$b^2(x+\sqrt{(a^2-b^2)})^2 = (a^2-b^2)(a^2-b^2-x^2),$$

of wel

$$a^2x^2 + 2xb^2\sqrt{(a^2-b^2)} = (a^2-b^2)^2 - b^2(a^2-b^2),$$

en dus $x^2 + 2x\frac{b^2\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2} = \frac{(a^2-b^2)(a^2-2b^2)}{a^2}$.

Deze vergelijking oplosfende komt er

$$x = -\frac{b^2\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{(a^2-b^2)(a^2-2b^2)}{a^2} + \frac{b^4(a^2-b^2)}{a^4}\right\}}$$

$$= -\frac{b^2\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{(a^2-b^2)(a^4-2b^2a^2+b^4)}{a^4}\right\}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2-b)^2}}{a^2}\left\{-b^2 \pm (a^2-b^2)\right\},$$

hetwelk voor x de twee waarden

$$x = \frac{(a^2-2b^2)}{a^2}\sqrt{(a^2-b^2)},$$

en $$x = -\sqrt{(a^2-b^2)}$$

geeft. Deze tweede waarde een oneigenlijk antwoord zijnde, zoo bepalen wij ons flechts tot de eerfte. Uit de waarde van x is nu ook dadelijk de tweede regthoekzijde bekend, en derhalve ook de geheele driehoek. De waarde van x kan men vinden door de volgende

Constructie. Op eene lijn AB (*Fig. 67*), gelijk aan a, befchrijve men eenen halven cirkel ACB, makende nu $AC = b$, dan is $BC = \sqrt{(a^2-b^2)}$ de hypotenufa van den gevraagden driehoek. Verder $CD = AC$ nemende en $AE = BD$ makende, zoo zal $BE^2 = a^2 - 2b^2$ zijn; trekkende dus de loodlijn EF, zoo is $EB^2 = AB \times FB$ of $a^2 - 2b^2 = a \times FB$ en dus $FB = \frac{a^2-2b^2}{a}$, zoodat FG evenwijdig aan AC trekkende, zal $BG = \frac{CB \times FB}{AB} = \frac{(a^2-2b^2)\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2} = x$ zijn, BG is dus de gezochte regthoekzijde. Men verlenge nu eindelijk FG en befchrijve uit B met BC als ftraal eenen cirkelboog fnijdende GF in H, dan is BGH de begeerde driehoek.

CLXXXI.

CLXXXI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt twee getallen te vinden wier som en quotiënt vierkanten zijn?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. H. GODEFROI, J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, J. P. OTT, J. WARNSINCK, J. JONKHERT, C. VAN SCHAICK, N. J. SINGELS, F. VAN HEUKELOM JR., M. G. SNOER, M. DE LEON *en* B. G. VAN KELL.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laten de beide getallen zijn x en p^2x, dan is hun quotiënt reeds een vierkant; hunne som is $x(1+p^2)$, zoodat nemende $x=n^2(1+p^2)$ men voor die som vindt $n^2(1+p^2)^2$, welke nu ook aan de andere voorwaarde voldoet. Voor $n=1$ en $p=2$ heeft men

$$x=5 \text{ en } p^2x=20,$$

voor $n=1$ en $p=3$ is $x=10$ en $p^2x=90$,

voor $n=2$ en $p=2$ is $x=20$ en $p^2x=80$,

en zoo voor al de andere waarden van n en p.

CLXXXII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt naar eenen regthoekigen driehoek waarvan de zijden eene meetkunstige reeks vormen, en waarvan den inhoud door een rationaal geheel getal kan worden uitgedrukt?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. JONKHERT, M. H. GODEFROI, J. BASSAN *en* J. P. OTT.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laten de drie zijden van den driehoek voorgesteld worden door

$$x, \quad xy \text{ en } xy^2.$$

Dan is voor den inhoud I

$$I=\tfrac{1}{2}x^2y,$$

en daar men nog heeft

$$x^2+x^2y^2=x^2y^4,$$

of

$$1+y^2=y^4,$$

zoo is

$$y=\pm\sqrt{(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5})}.$$

Zal nu de inhoud een rationaal geheel getal zijn, dan zal x zulks niet kunnen wezen, en derhalve de zijden van den driehoek ook niet. Het is dus niet mogelijk de zijden zoodanig te bepa-

len,

len, dat zij in geheele getallen aan de vraag voldoen. Men heeft dan nu

$$I = \tfrac{1}{2}x^2\sqrt{(-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{5})},$$

of

$$x = \frac{\sqrt{2I}}{\sqrt[4]{(-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{I}}{\sqrt[4]{(-1\pm+5)}},$$

of zoo men alleen beſtaanbare waarden wil hebben

$$x = \frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{I}}{\sqrt[4]{(-1+\sqrt{5})}}.$$

CLXXXIII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Van eene harmoniſche reeks ſtaat de eerſte tot den zesden term als 2 : 1, *de ſom van den tweeden, vierden en vijfden term is* $12\frac{1}{12}$, *en de laatſte term* $2\frac{1}{2}$, *men vraagt naar het aantal termen?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. P. OTT, J. JONKHERT, N. J. SINGELS, C. VAN SCHAICK, J. BASSAN, J. WARNSINCK, M. H. GODEFROI, M. G. SNOER, M. DE LEON, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* G. GRAAFLAND.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Laat de reeks zijn

$$\frac{1}{x};\ \frac{1}{x+y},\ \frac{1}{x+2y};\ \frac{1}{x+3y}\ \ldots\ \frac{1}{x+(n-1)y};$$

waarin dan n het aantal der termen is. Nu is volgens de eerſte voorwaarde

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x+5y} = 2:1 \quad \ldots\ldots\ (1).$$

De tweede

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+3y}+\frac{1}{x+4y} = \frac{145}{12} \quad \ldots\ (2),$$

en de derde

$$\frac{1}{x+(n-1)y} = \frac{5}{2} \quad \ldots\ldots\ (3).$$

Uit (1) volgt

$$2x = x+5y,$$

of

$$x = 5y.$$

Hierdoor verandert (2) in

$$\frac{1}{6y}+\frac{1}{8y}+\frac{1}{9y}=\frac{145}{12},$$

of

$$870y=29,$$

en dus

$$y=\frac{1}{30},$$

waardoor x wordt

$$x=\frac{1}{6}.$$

De beide waarden in (3) gesteld, geven

$$\frac{30}{5+(n-1)}=\frac{5}{2},$$

of

$$5(n+4)=60,$$

en dus

$$n=8.$$

Er zijn alzoo 8 termen in de reeks, welke nu is

$$6,\ 5,\ \frac{30}{7},\ \frac{15}{4},\ \frac{10}{3},\ 3,\ \frac{30}{11}\text{ en }\frac{5}{2}.$$

CLXXXIV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Van eene harmonische reeks van vijf termen staat de tweede tot de laatste als 7 : 4, en de som der beide eerste met den vierden term is 54; men vraagt naar de reeks?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. JONKHERT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, G. GRAAFLAND, M. H. GODEFROI, M. DE LEON, M. G. SNOER, C. VAN SCHAICK, J. BASSAN, F. VAN HEUKELOM JR., J. P. OTT, J. WARNSINCK *en* N. J. SINGELS.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Laat de reeks voorgesteld worden door de termen

$$\frac{1}{x+2y},\ \frac{1}{x+y},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x-y}\text{ en }\frac{1}{x-2y},$$

dan hebben wij ingevolge het voorstel de twee vergelijkingen

$$\frac{1}{x+y}:\frac{1}{x-2y}=7:4,$$

en

$$\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=54.$$

Uit de eerste volgt

$$7(x+y)=4(x-2y),$$

of

$$3x=-15y,$$

dat is

$$x=-5y.$$

Hier-

Hierdoor verandert de tweede vergelijking in

$$\frac{1}{-3y}+\frac{1}{-4y}+\frac{1}{-6y}=54,$$

of

$$-\frac{3}{4y}=54,$$

en dus

$$y=-\frac{1}{72},$$

en

$$x=\frac{5}{72}.$$

De reeks is derhalve

$$\frac{72}{3},\ \frac{72}{4},\ \frac{72}{5},\ \frac{72}{6} \text{ en } \frac{72}{7},$$

of

$$24,\ 18,\ 14\tfrac{2}{5},\ 12 \text{ en } 10\tfrac{2}{7}.$$

CLXXXV. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Welke veelhoekige getallen zijn het, die bij een vierhoekig getal opgeteld een vijfhoekig en er van afgetrokken een driehoekig getal opleveren, zoodanig dat de drie, vier en vijfhoekige getallen alle van denzelfden wortel zijn?

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, J. BASSAN, J. JONKHERT, J. P. OTT, M. G. SNOER *en* J. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Dewijl een driehoekig getal, wiens wortel n is, voorgesteld wordt door

$$\tfrac{1}{2}n(n+1),$$

een vierhoekig getal van denzelfden wortel door n^2, en een vijfhoekig door $\frac{1}{2}n(3n-1)$, zoo is het verschil tusschen het vier en driehoekig getal

$$n^2-\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{2}(n-1)n,$$

en het verschil tusschen het vijf en vierhoekige getal

$$\tfrac{1}{2}n(3n-1)-n^2=\tfrac{1}{2}(n-1)n,$$

hetzelfde verschil; en hieruit blijkt, daar $\frac{1}{2}(n-1)n$ een driehoekig getal voorstelt wiens wortel $n-1$ is, dat elk driehoekig getal opgeteld met een vierhoekig getal, wiens wortel één grooter is, een vijfhoekig getal van denzelfden wortel geeft, en dat elk driehoekig getal van hetzelfde vierhoekige getal afgetrokken zijnde, een driehoekig getal geeft, wiens wortel aan dat van het vier-

vier- en vijfhoekig getal gelijk is. Men kan dan zeggen, dat elk driehoekig getal, wiens wortel één minder is dan het gegevene vierhoekige getal, dan het voorstel voldoet.

CLXXXVI. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Iemand eene erfenis van eenige duizend Gulden ontvangen hebbende, belegt $\frac{3}{23}$ deelen van dezelve tegen $4\frac{3}{4}$ ten honderd in het jaar, eene partij van 1000 *Gulden minder tegen $2\frac{1}{2}$ ten honderd, eene partij van* 1000 *Gulden meer dan de eerste partij tegen $4\frac{1}{4}$ ten honderd, en nog eene partij zoo veel als de twee eerste te zamen tegen* 4 *ten honderd, en de rest tegen $3\frac{3}{4}$ ten honderd, indien dit kapitaal nu aldus belegd 's jaars* 1885 *Gulden oplevert, hoe groot is hetzelve geweest?* (*)

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, F. VAN HEUKELOM JR., J. JONKHERT, N. J. SINGELS, C. VAN SCHAICK, M. SALOMO, M. DE LEON, J. J. GASTMAN, N. BARENDS, M. G. SNOER, J. P. OTT, J. WARNSINCK *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Laat de geheele erfenis voorgesteld worden door $23x$, dan geeft het $\frac{3}{23}$ gedeelte daarvan tegen $4\frac{3}{4}$ ten honderd

$$100 : 3x = 4\frac{3}{4} : \frac{57}{400}x,$$

of $\frac{57}{400}x$ Gulden in het jaar. Het tweede gedeelte bedragende $3x - 1000$ geeft dan

$$100 : 3x - 1000 = 4\frac{1}{2} : \frac{9}{200}(3x - 1000),$$

of $\frac{9}{200}(3x - 1000)$ Gulden in het jaar. De derde partij geeft om dezelfde reden

$$100 : 3x + 1000 = 4\frac{1}{4} : \frac{17}{400}(3x + 1000),$$

of $\frac{17}{400}(3x + 1000)$ Gulden in het jaar. Eindelijk geeft de laatste partij, bedragende $3x + 3x - 1000$ of $6x - 1000$

$$100 : 6x - 1000 = 4 : \frac{4}{100}(6x - 1000),$$

of $\frac{4}{100}(6x - 1000)$ Gulden in het jaar; alsmede de rest tegen $3\frac{3}{4}$

$$\frac{15}{400}(11x + 1000),$$

en daar alle deze renten te zamen 1885 Gulden bedragen, zoo hebben wij

$$\frac{57}{400}x$$

(*) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, bladz. 250 vraag 55.

$$\tfrac{57}{400}x+\tfrac{2}{100}(3x-1000)+\tfrac{57}{400}(3x+1000)+\tfrac{4}{100}(6x-1000)$$
$$+\tfrac{15}{400}(8x+1000)=1885,$$

of $\frac{57+54+51+96+120}{400}x-\frac{+18-17+16-15}{400}1000=1885,$

en dus $\frac{378}{400}x-5=1885,$

of wel $x=\frac{756000}{378}=2000,$

en derhalve de geheele erfenis bedraagt 40000 Gulden.

CLXXXVII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Van eenen driehoek is de ſom van twee zijden 112, en derzelver product 2560, en de ingeſloten hoek bevat zoo veel graden als het verſchil der zijden eenheden heeft; men vraagt dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, J. BASSAN, J. P. OTT, I. WARNSINCK, J. JONKHERT *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Laten de beide zijden voorgeſteld worden door $56-x$ en $56+x$, dan geeft de eerſte voorwaarde van het vraagſtuk

$$(56-x)(56+x)=2560,$$

waaruit volgt $x^2=3136-2560=576,$

en dus $x=24.$

De zijden zijn dus 80 en 32. De ingeſlotene hoek bevat alzoo 2.24 of 48 graden. Waardoor de driehoek geheel bepaald is. Zijnen inhoud kan men op de volgende wijze voorſtellen:

Omdat $Sin.48^0=\frac{1}{8}\{\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\}$ is, zoo heeft men voor den inhoud

$$40\times32.\tfrac{1}{8}\{\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\}$$
$$=160\{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\}.$$

CLXXXVIII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men vraagt twee ongelijke poſitieve getallen te vinden, welker ſom in de ſom hunner vierkanten gedeeld zijnde, het quotient het kleinſt mogelijke geheele getal zij? (*)

OP-

(*) A. B. STRABBE, *Finale Rekening*, p. 180. No. 8.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Laten de beide getallen voorgeſteld worden door $x+y$ en $x-y$; alsdan is x de rekenkunstige middenevenredige tusſchen de beide getallen, zijn dus deze beide even of oneven dan is x een geheel getal en dienvolgens ook y. Doch zijn de beide getallen niet te gelijk even of oneven, dan kan x een gebroken zijn, 2 tot noemer hebbende, doch alsdan moet ook y dien zelfden noemer hebben, aangezien de getallen $x+y$ en $x-y$ beide geheele getallen moeten blijven. Wij zullen deze gevallen ieder afzonderlijk behandelen.

Nemende dan vooreerst dat x en y beide geheele getallen zijn. De ſom der getallen is $2x$ en de ſom hunner vierkanten $2x^2+2y^2$, zoodat hun quotient

$$\frac{x^2+y^2}{x} = x+\frac{y^2}{x}$$

wordt. Zal nu dit quotient het kleinst mogelijke wezen, dan zal y^2 ook zoo klein mogelijk moeten zijn, nu kan echter, daar y en x geheele getallen voorſtellen, $\frac{y^2}{x}$ op zijn kleinst $= 1$ of $y^2 = x$ zijn, en dan wordt het quotient y^2+1. De kleinſte waarde van y zou de eenheid wezen, doch alsdan is x ook gelijk één, en derhalve $x-y=0$, hetgeen tegen de voorwaarde van het vraagſtuk ſtrijdt; wij nemen dan $y=2$, alsdan wordt het quotient $=5$, en $x=4$; de getallen zijn dan 6 en 2.

Voor het tweede geval kan men de getallen voorſtellen door

$$\frac{2n+1}{2}+\frac{2m+1}{2} \text{ en } \frac{2n+1}{2}-\frac{2m+1}{2},$$

of wat hetzelfde is door

$$n+m+1 \text{ en } n-m.$$

De ſom dezer getallen is dus $2n+1$, en de ſom hunner vierkanten $2n^2+2m^2+2n+2m+1$, zoodat het quotient wordt

$$\frac{2n^2+2m^2+2n+2m+1}{2n+1} \quad \ldots \quad (a).$$

Hoe kleinder m genomen wordt des te kleiner wordt dit quotient, nu kan men echter m niet kleiner dan één nemen, en dan wordt het quotient

$2n^2$

$$\frac{2n^2+2n+5}{2n+1} = n + \frac{n+5}{2n+1}.$$

De kleinſte waarde die aan den breuk $\frac{n+5}{2n+1}$ gegeven kan worden is wederom de eenheid, dat is, $n+5 = 2n+1$, waaruit volgt $n = 4$, en het quotient wordt even als in het eerſte geval $= 5$; en de beide getallen worden 6 en 2.

Aanmerking. Door het quotient (α) op de gewone wijze te differentieren; n en m als twee onafhankelijke veranderlijke grootheden te beſchouwen, zou men tot dezelfde uitkomst gekomen zijn.

CLXXXIX. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Op de bazis AD *van eenen driehoek* ADB *is een halve cirkel beſchreven, welke de zijden des driehoeks in* B *en* C *ſnijdt; wanneer nu de ſtukken* AB, BC *en* DC *gegeven zijn; vraagt men den driehoek te bepalen?*

Opgelost *door* J. Bassan, W. J. C. Rammelman Elsevier, J Jonkhert *en* J. P. Ott.

Oplossing *van* J. Bassan.

Laat ADE (*Fig.* 68) de begeerde driehoek zijn, alwaar op de lijn AD de halve cirkel ABCD getrokken is, en laten de ſtukken DC $= a$, BC $= b$ en AB $= c$ gegeven zijn, alsmede hoek EAD $= \Phi$; zoo men dan nu de lijnen AC en BD trekt, zal men hebben in den driehoek ABD, welke regthoekig in B is,

$$BD = BA\,Tang.\,\Phi = c\,Tang.\,\Phi,$$

en daar hoek BCD het ſupplement van den hoek BAD is, zoo heeft men uit den driehoek BCD

$$BD = \sqrt{(a^2+b^2+2ab\,Cos.\,\Phi)},$$

hetwelk met de voorgaande vergelijking verbonden, geeft

$$c^2\,Tang^2.\,\Phi = a^2+b^2+2ab\,Cos.\,\Phi;$$

of daar $Tang^2.\,\Phi = \frac{Sin^2.\,\Phi}{Cos^2.\,\Phi} = \frac{1-Cos^2.\,\Phi}{Cos^2.\,\Phi}$

$$c^2(1-Cos^2\,\Phi) = (a^2+b^2)\,Cos^2\,\Phi + 2ab\,Cos^2.\,\Phi,$$

waaruit volgt $Cos^2.\,\Phi + \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}\,Cos^2\,\Phi = \frac{c^2}{2ab}$.

Uit deze vergelijking den hoek Φ gevonden hebbende, is nu de be-

bepaling der overige gedeelten aan geene zwarigheid verbonden; want nu ook BD bekend zijnde, is

$$AD^2 = c^2 + BD^2,$$

en alsdan is $AC^2 = AD^2 - a^2 = c^2 - a^2 + BD^2$.

Verder is $AE^2 = (c + BE)^2 = AC^2 + EC^2$,

en $DE^2 = (a + CE)^2 = BD^2 + BE^2$,

in welke vergelijkingen BE en EC alleen onbekend zijn, en alzoo uit dezelve gevonden kunnen worden. Kortheidshalve neme men $BE = x$, $CE = y$, alsmede $AC = m$ en $DB = n$, dan worden deze vergelijkingen

$$(c + x)^2 = m^2 + y^2,$$

en $$(a + y)^2 = n^2 + x^2,$$

of wel $$x^2 - y^2 + 2cx = m^2 - c^2,$$

en $$y^2 - x^2 + 2ay = n^2 - a^2,$$

waarvan de som is

$$2cx + 2ay = m^2 + n^2 - c^2 - a^2,$$

en hieruit volgt

$$y = \frac{m^2 + n^2 - a^2 - c^2 - 2cx}{2a}.$$

Hetwelk gesteld in de vergelijking

$$x^2 - y^2 + 2cx = m^2 - c^2,$$

geeft

$$4a^2x^2 - (m^2 + n^2 - a^2 - c^2 - 2cx)^2 + 8a^2cx = 4(m^2 - c^2)a^2$$

of wel $$4(a^2 - c^2)x^2 + 4c(m^2 + n^2 + a^2 - c^2)x = 4a^2(m^2 - c^2) + (m^2 + n^2 - a^2 - c^2)^2,$$

en dus

$$x^2 + c\frac{m^2 + n^2 + a^2 - c^2}{a^2 - c^2}x = \frac{a^2(m^2 - c^2)}{a^2 - c^2} + \frac{(m^2 + n^2 - a^2 - c^2)^2}{a^2 - c^2},$$

waaruit nu door den gewonen regel de waarde van x, of van BE en dus ook die van y, of van EC gevonden kan worden.

CXC. VOORSTEL.

Door J. BAASAN.

Van eenen driehoek is bekend de tophoek, benevens het verschil tusschen elk der opstaande zijden en het stuk van de grondlijn, begrepen tusschen den hoek aan deze zijde en het voetpunt van de loodlijn, welke uit den tophoek nedergelaten, op de grondlijn valt?

OPGELOST door J. BASSAN, J. P. OTT, J. JONKHERT en W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OP-

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC (*Fig.* 69) de driehoek en BD de loodlijn; nemende nu EC = CD en AF = AD, dan is BE = a, FB = b en *hoek* ABC = α bekend; verder ſtelle men CD = x en AD = y, dan volgt uit de regthoekige driehoeken ADB en BDC

$$AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2,$$

of $$(b+y)^2 - y^2 = (a+x)^2 - x^2,$$

dat is $$b^2 + 2by = a^2 + 2ax \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Maar nu volgt nog uit den driehoek ABC

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC\, Cos.\,ABC,$$

of $$(x+y)^2 = (b+y)^2 + (a+x)^2 - 2\,(b+y)(a+x)\,Cos.\,\alpha,$$

of na herleiding

$$2xy = b^2 + 2by + a^2 + 2ax - 2\,(b+y)(a+x)\,Cos.\,\alpha \quad \ldots (2).$$

Hierin voor y zijne waarde uit (1) ſtellende, komt er

$$\frac{a^2+2ax-b^2}{b}\,x = 2\,(a^2+2ax) - \ldots\ldots$$

$$-\left(2b + \frac{a^2+2ax-b^2}{b}\right)(a+x)\,Cos.\,\alpha,$$

en dit ontwikkelende vindt men

$$2a\,(1+Cos.\,\alpha)\,x^2 - \left\{b^2 + 4ab - a^2 - (3a^2+b^2)\,Cos.\,\alpha\right\} x$$

$$= 2a^2 b - a\,(a^2+b^2)\,Cos.\,\alpha.$$

Waaruit volgt

$$x^2 - \frac{b^2+4ab-a^2-(3a^2+b^2)\,Cos.\,\alpha}{4a\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\alpha}\,x = \frac{2ab-(a^2+b^2)\,Cos.\,\alpha}{4\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\alpha},$$

en dus $$x = \frac{b^2+4ab-a^2-(3a^2+b^2)\,Cos.\,\alpha}{8a\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\pm V\left\{\frac{2ab-(a^2+b^2)\,Cos.\,\alpha}{4\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\alpha} + \left(\frac{b^2+4ab-a^2-(3a^2+b^2)\,Cos.\,\alpha}{8a\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\alpha}\right)^2\right\}.$$

Door a met b, en b met a te verwisſelen, vindt men

$$y = \frac{a^2+4ab-b^2-(3b^2+a^2)\,Cos.\,\alpha}{8b\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\pm V\left\{\frac{2ab-(a^2+b^2)\,Cos.\,\alpha}{4\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\alpha} + \left(\frac{a^2+4ab-b^2-(3b^2+a^2)\,Cos.\,\alpha}{8b\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\alpha}\right)^2\right\}.$$

Is de driehoek regthoekig in B, dan is $Cos.\,\alpha = 0$, en men heeft

$$x = \frac{b^2+4ab-a^2}{4a} \pm V\left\{ab + \left(\frac{b^2+4ab-a^2}{4a}\right)^2\right\},$$

of wel $aR = cy + bz$ . . . . . (1).

Op dezelfde wijze vindt men uit de vierhoeken BGOF en CFOE

$bR = az + cx$ . . . . . (2),

en $cR = ay + bx$ . . . . . (3),

Verder ziet men dat

2 *inhoud drieh.* $ABC = ax + by + cz$

is, en daar tevens

2 *inhoud drieh.* $ABC = r(a+b+c)$

is, zoo heeft men

$r(a+b+c) = ax + by + cz$ . . . . (4),

De vergelijkingen (1) tot (4) bij elkander tellende, komt er

$(a+b+c)(R+r) = (a+b+c)x + (a+b+c)y + (a+b+c)z$,

en derhalve $R + r = x + y + z$.

Aanmerkingen. In *Fig.* 71, is de driehoek ſcherphoekig genomen, alsdan valt het middelpunt O van den omgeſchreven cirkel binnen den driehoek, en de loodlijnen EO, FO en GO zijn alle poſitief; doch zoo men zich voorſtelt dat, bij voorbeeld, de hoek A langzamerhand aangroeit, dan zal de driehoek regthoekig en daarna ſtomphoekig worden. Wordt hoek A regt, dan valt het punt O in de zijde BC, en men heeft dus $EO = o$, in den regthoekigen driehoek ABC, *Fig.* 72, heeft men dan

$R + r = GE + EF = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB$,

en daar $R = \frac{1}{2}BC$ is, heeft men

$r = \frac{1}{2}(AC + AB - BC)$,

of $2r = AC + AB - BC$.

Dat is: *in eenen regthoekigen driehoek is de middellijn, van den ingeſchreven cirkel, gelijk aan het verſchil tuſſchen de ſom der regthoekzijden en de ſchuinſche zijde.*

Wordt de hoek A ſtomp, dan valt het middelpunt O buiten den driehoek en de loodlijn OE aan de andere zijde van de baſis B'C' vallende is negatief, en men heeft dan

$R + r = y + z - x$.

Zoo als men ook, door op deze figuur de redeneringen, op de *Fig.* 71 gedaan, toepaſſende, onmiddellijk had kunnen vinden.

CXCIII. VOORSTEL.

Door L. F. Beaulieu.

In elken driehoek ſnijden de loodlijnen, uit de hoeken op de over-

ſtaan-

ſtaande zijden nedergelaten, zich in een punt, men vraagt te bewijzen, dat de ſom der afſtanden van dit ſnijpunt tot aan de hoeken, gelijk is aan de ſom der middellijnen van den in- en omgeſchreven cirkel?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, J. JONKHEER, I. WARNSINCK, J. P. OTT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Dezelfde figuur als in het voorgaande voorſtel gebruikende, zoo trekken wij nog de loodlijnen A*h*, B*i* en C*k*, welke zich in D ſnijden, alsmede de middellijn AOL en de lijnen BL en LC, alsdan is *hoek* ABL = *hoek* AKC = 90° en *hoek* ACL = *hoek* A*i*B = 90°; zoodat BL evenwijdig aan CK en CL evenwijdig aan B*i* is, derhalve CD = BL; en omdat AL = 2AO is, zoo is ook 2GO = BL; en om dezelfde reden is AD = 2OE en DB = 2OF, dus

$$AD + BD + CD = 2(OE + OF + OG),$$

en daar in het voorgaande voorſtel reeds bewezen is, dat

$$OE + OF + OG = R + r$$

is, zoo heeft men blijkbaar

$$2R + 2r = AD + BD + CD.$$

AANMERKING. Uit de beſchouwing van *Fig.* 72, alwaar de driehoek AB′C′ ſtomp is, zal het, even als in de Aanmerking op het voorgaande voorſtel, blijken, dat, daar de loodlijn A*h* van A naar *h* als poſitief gerekend worden, het gedeelte AD als negatief moet beſchouwd worden, en dat men derhalve bij eenen ſtomphoekigen driehoek hebben zal

$$2R + 2r = B'D + C'D - AD.$$

Voor eenen regthoekigen driehoek heeft men 2R+2*r* = BA+CA en dus dezelfde eigenſchap die in het voorgaande voorſtel is aangewezen.

CXCIV. VOORSTEL.

Door J. N. CALTEN.

Een regte cirkelvormige kegel drijft op het water met den top benedenwaards, het zwaartepunt des kegels op eenen gegevenen afſtand buiten de as gelegen zijnde, zoo vraagt men den ſtand van dezen kegel in het water te berekenen?

OPGELOST *door* J. BADON GHYBEN, J. N. CALTEN *en* J. JONKHERT.

ORLOSSING *van* J. BADON GHYBEN.

Wij nemen aan, dat het geheele grondvlak des drijvenden kegels, boven water blijft, en ſtellen door ABC (*Fig.* 73) voor, de doorſnijding van den kegel met een vlak gaande door de as CD en het zwaartepunt Z van den kegel. Dit vlak moet noodwendig loodregt op den waterſpiegel MN ſtaan, en dewijl hetzelve het ingedompeld deel des kegels in twee gelijke deelen verdeelt, moet ook het zwaartepunt der verplaatſte hoeveelheid water in hetzelve gelegen zijn. De hoek CPR zal nu de hoek zijn die de as des kegels met den waterſpiegel maakt, en ter beantwoording der vraag zal men dien hoek zoo wel als het gedeelte CP van de as des kegels, dat beneden den waterſpiegel blijft, moeten bepalen. Wij nemen daartoe *hoek* CPR $= \phi$ en CP $= x$, verder de ſoortelijke zwaarte van den kegel $= p$ die van het water $= 1$ zijnde, de afſtand ZQ $= a$, CQ $= b$ waardoor het zwaartepunt van den kegel bepaald wordt, en eindelijk AB $= d$, CD $= h$ AC $= s$ en *hoek* ACB $= \alpha$.

Voor eerst wordt nu tot het in rust zijn des drijvenden kegels gevorderd, dat deszelfs gewigt en het gewigt der verplaatſte watermaſſa aan elkander gelijk zij, en daartoe moeten de inhouden in omgekeerde reden der ſoortelijke zwaarten zijn.

Om den inhoud der verplaatſte watermaſſa te vinden, merken wij op, dat de doorſnede van den waterſpiegel met den kegel eene ellips is, waarvan OR de groote as is; en welker kleine as gevonden wordt door de eigenſchap dat de ordinaat in het punt P vierde evenredig zijnde tot CD, AD en CP, en dus door $\frac{x\,d}{2\,h}$ voorgeſteld kunnende worden, men uit de vergelijking der ellips heeft

$$\sqrt{\text{OP} \times \text{PR}} : \frac{x\,d}{2\,h} = \text{OR} : \text{de kleine as},$$

welke dan is

$$\frac{x\,d \times \text{OR}}{2\,h\sqrt{\text{OP} \times \text{PR}}}.$$

Trekkende nu CS loodregt op MN, dan vindt men den inhoud van

van den ingedompelden kegel COR door den inhoud der ellips OR met een derde van CS te vermenigvuldigen; en, daar de inhoud der ellips gevonden wordt door het produkt van π met dat der halve assen, zoo hebben wij

$$\text{inh. kegel COR} = \tfrac{1}{3}\text{CS} \times \tfrac{1}{4}\pi \frac{x\,d\,.\,\text{OR}^2}{2\,h\sqrt{\text{OP} \times \text{PR}}},$$

$$= \tfrac{1}{24}\pi \frac{x\,d\,\text{CS} \times \text{OR}^2}{h\sqrt{\text{OP} \times \text{PR}}} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Nu is uit den driehoek CPR

$$\text{PR} = \frac{x\,Sin.\,\frac{1}{2}\alpha}{Sin.\,(\phi + \frac{1}{2}\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots (2),$$

en uit den driehoek CPQ

$$\text{OP} = \frac{x\,Sin.\,\frac{1}{2}\alpha}{Sin.\,(\phi - \frac{1}{2}\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Deze vergelijkingen bij elkander tellende komt er

$$\text{OR} = x\frac{Sin.\,(\phi - \frac{1}{2}\alpha)\,Sin\,\frac{1}{2}\alpha + Sin.\,\frac{1}{2}\alpha\,Sin.\,(\phi + \frac{1}{2}\alpha)}{Sin.\,(\phi - \frac{1}{2}\alpha)\,Sin.\,(\phi + \frac{1}{2}\alpha)}$$

$$= \frac{x\,Sin.\,\alpha\,Sin.\,\phi}{Sin^2.\,\phi - Sin^2.\,\frac{1}{2}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (4),$$

en dezelve vermenigvuldigende

$$\text{OP} \times \text{PR} = \frac{x^2\,Sin^2.\,\frac{1}{2}\alpha}{Sin^2.\,\phi - Sin^2.\,\frac{1}{2}\alpha} \quad \ldots\ldots (5).$$

Uit driehoek CDA is

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{d}{2\,s},$$

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{h}{s},$$

en derhalve

$$2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha = Sin.\,\alpha = \frac{h\,d}{s^2},$$

hierdoor veranderen (2), (4) en (5) in

$$\text{PR} = \frac{x\,d}{2\,h\,Sin.\,\phi + d\,Cos.\,\phi} \quad \ldots\ldots (6),$$

$$\text{OR} = \frac{4\,x\,d\,h\,Sin.\,\phi}{4\,s^2\,Sin^2.\,\phi - d^2} \quad \ldots\ldots (7),$$

en $$\text{OP} \times \text{PR} = \frac{x^2\,d^2}{4\,s^2\,Sin^2.\,\phi - d^2} \quad \ldots\ldots (8).$$

Uit

Uit den driehoek PSC is eindelijk

$$CS = x\,Sin.\,\phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

en

$$PS = -x\,Cos.\,\phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Wanneer wij nu (7), (8) en (9) in (1) ſtellen, komt er

$$inhoud\,COR = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\pi \frac{x^2 d\,Sin.\,\phi \,.\, 16\,x^2 d^2 h^2\,Sin^2.\,\phi}{(4s^2\,Sin^2.\,\phi - d^2)^2\,h\,x\,d} \sqrt{(4s^2\,Sin^2.\,\phi - d^2)}$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi \frac{x^3 d^2 h\,Sin^3.\,\phi}{\sqrt{(4s^2\,Sin^2.\,\phi - d^2)^3}},$$

en daar de inhoud van den geheelen kegel is $\frac{1}{12}\pi h d^2$, zoo heeft men wegens de gelijkheid van het gewigt dezer beide inhouden

$$\tfrac{2}{3}\pi \frac{d^2 h\,x^3\,Sin^3.\,\phi}{\sqrt{(4s^2\,Sin^2.\,\phi - d^2)^3}} = \tfrac{1}{3}\pi p^3 h d^2,$$

of

$$8\,x^3\,Sin^3.\,\phi = p^3 \sqrt{(4s^2\,Sin^2.\,\phi - d^2)^3},$$

en dus ook

$$2\,x^2\,Sin.\,\phi = p\sqrt{(4s^2\,Sin^2.\,\phi - d^2)} \quad . \quad . \quad (11).$$

Ten tweede wordt tot het in rust zijn des kegels gevorderd, dat deszelfs zwaartepunt en dat der verplaatſte watermaſſa in dezelfde verticale lijn gelegen zij; daar nu het zwaartepunt Z' der laatstgenoemde maſſa in de lijn CK (zijnde OK = KR) gelegen is, en wel zoodanig, dat $CZ' = \frac{3}{4}CK$ is, zoo moeten de afſtanden NZ en MZ' even groot zijn. Uit Q de lijnen VQ en WQ loodregt op CS en NZ trekkende, alsmede QZ, zoo is *hoek* ZQW = OPC, en dus

$$ZW = QZ\,Sin.\,OPC$$

$$= a\,Sin.\,\phi,$$

en

$$VQ = NW = CQ\,Cos.\,CQV$$

$$= -b\,Cos.\,\phi,$$

waaruit door optelling volgt

$$ZN = a\,Sin.\,\phi - b\,Cos.\,\phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Dewijl nu $CZ' = \frac{3}{4}CK$ is, moet ook $Z'M = \frac{3}{4}SK$ zijn, maar

$$SK = PR + SP - KR = PR + SP - \tfrac{1}{2}OR,$$

en hierin de waarden uit (6), (7) en (10) ſtellende, komt er

$$SK = \frac{x\,d}{2\,h\,Sin.\,\phi + d\,Cos.\,\phi} - x\,Cos.\,\phi - \frac{2\,x\,d\,h\,Sin.\,\phi}{4s^2\,Sin^2.\,\phi - d^2}.$$

Deze uitdrukking tot denzelfden noemer brengende en alles herleidende, daarbij in aanmerking nemende dat $s^2 = h^2 + \frac{1}{4}d^2$ is, vindt men

SK

$$SK = -\frac{4s^2 x \, Sin^2.\phi \, Cos.\phi}{4s^2 \, Sin^2.\phi - a^2},$$

en dus $$Z'M = \tfrac{1}{4} SK = -\frac{3 x s^2 \, Sin^2.\phi \, Cos.\phi}{4 s^2 \, Sin.\phi - d^2} \quad . \quad . \quad (13).$$

Uit de vergelijking van (12) en (13) hebben wij dus de tweede vergelijking

$$a \, Sin.\phi - b \, Cos.\phi = -\frac{3 x s^2 \, Sin^2.\phi \, Cos.\phi}{4 s^2 \, Sin^2.\phi - d^2} \quad . \quad (14).$$

De vergelijkingen (11) en (14) moeten dan nu dienen ter bepaling van x en ϕ. De waarde van x uit (11) in (14) schrijvende, komt er

$$a \, Sin.\phi - b \, Cos.\phi = -\frac{3 s^2 \, Sin^2.\phi \, Cos.\phi}{4 s^2 \, Sin^2.\phi - d^2} \cdot p \frac{\sqrt{(4 s^2 \, Sin^2.\phi - d^2)}}{2 \, Sin.\phi}$$

$$= -\tfrac{1}{2} p \frac{s^2 \, Sin.\phi \, Cos.\phi}{\sqrt{(4 s^2 \, Sin^2.\phi - d^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

In deze vergelijking nu voor $Sin.\phi$ zijne waarde $\sqrt{(1 - Cos^2.\phi)}$ schrijvende, alles, ontwikkelende en de worteltekens verdrijvende, komt men op eene zeer zamengestelde vergelijking van de achtste magt van de vierdemagtsvorm, waardoor men $Cos.\phi$ en dus ϕ vinden kan, zoodra de overige gegevens in getallen bekend zijn; ϕ bekend zijnde, dan kan men uit de vergelijking (11) of (14) x gemakkelijk vinden.

Voor $p = \sqrt{\frac{4}{5}}$, $a = 1$, $b = 7$, $d = \frac{5}{4}\sqrt{11}$ en $s = 5$, vindt men uit (15) na herleiding

$3200 \, Cos^8.\phi - 39040 \, Cos^6.\phi + 13876 \, Cos^4.\phi - 1236 \, Cos^2.\phi + 9 = 0$,

aan deze vergelijking voldoet $Cos^2 \phi = \frac{1}{2}$ of $Cos.\phi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, en dus $\phi = 45°$ en $\phi = 135°$, welke beide waarden echter slechts eenen enkelen stand voor den kegel geven. Door (11) vindt men gemakkelijk $x = 2\frac{1}{2}$.

Aanmerking. Het is opmerkelijk dat de betrekking tusschen x en ϕ niet van de grootte van a of van de grootte van den tophoek des kegels afhangt, want uit de vergelijkingen (11) en (14) de wortel grootheid verdrijvende, komt men op de vergelijking

$$Tang.\phi = \frac{b}{a} - \frac{3 p^2 s^2}{4 a x}.$$

CXCV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHYBEN.

Als men in eene functie $y = F(x)$, *x laat aangroeijen tot* $x+h$, *en de overeenkomstige aangroeijingen van y, die wij* Δy *noemen, opmaakt, dan vindt men* $\Delta y = F'(x;h)$; *indien men nu in deze laatste functie (h al of niet veranderlijk beschouwende) wederom x laat aangroeijen tot* $x+k$, *en de overeenkomstige aangroeijing van* Δy *die wij* $\Delta_2 y$ *noemen, opmaakt, dan zal alleen voor het geval van* $h = k$; $\Delta_2 y$ *beschouwd kunnen worden, als het tweede verschil eener reeks van drie termen, die verkregen is, door in* $y = F(x)$ *drie verschillende waarden aan x te geven. Men vraagt naar het bewijs?*

OPLOSSING *van* J. BADON GHYBEN.

De waarde van $y = F(x)$ verandert door x met h te doen aangroeijen in $y + \Delta y = F(x+h)$, waaruit door aftrekking volgt $\Delta y = F(x+h) - F(x)$; hieruit blijkt dan dat $F(x+h)$ en $F(x)$ de eerste termen der reeks zijn waarvan Δy het verschil is. Wij stellen nu h veranderlijk en laten in Δy, x in $x+k$ en in $h+h'$ overgaan, men vindt dan

$$\Delta y + \Delta^2 y = F(x+h+k+h') - F(x+k),$$

hiervan af

$$\Delta y = F(x+h) - F(x),$$

komt er

$$\Delta^2 y = F(x+h+k+h') - F(x+k) - F(x+h) + F(x).$$

Vormt men nu door achtervolgende optelling de derde term der reeks, waarvan $\Delta^2 y$ het tweede verschil is, dan heeft men

$$F(x+h+h'+k) - F(x+k) + F(x+h),$$

Zal nu deze term bestaan uit de waarde die $y = F(x)$ verkrijgt door aan x eene derde waarde $(x+h+p)$ te geven, dan moet de hier voren gevonden uitdrukking tot den vorm $F(x+h+p)$ kunnen gebragt worden. Ontwikkelt men beide deze uitdrukkingen door het theorema van TAYLOR, dan heeft men

$$F(x+h+h'+k) = F(x) + \frac{\partial . F(x)}{\partial x}(h+h'+k) + \frac{\partial^2 . F(x)}{2\partial x^2}(h+h'+k)^2 + \text{enz.}$$

$$-F(x+k) = -F(x) - \frac{\partial . F(x)}{\partial x} k - \frac{\partial^2 . F(x)}{2\partial x^2} k^2 - \text{enz.}$$

$$+F(x+h) = F(x) + \frac{\partial . F(x)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 . F(x)}{2\partial x^2} h^2 + \text{enz.}$$

waar-

waaruit door optelling volgt

$$F(x+h+h'+k)-F(x+k)+F(x+h)=F(x)$$
$$+\frac{\partial.F(x)}{\partial x}(2h+h')+\frac{\partial^2F(x)}{2.\partial x^2}\{(h+h'+k)^2-k^2+h^2\}+enz. \quad (1).$$

Daarentegen geeft de ontwikkeling van $F(x+h+p)$

$$F(x+h+p)=F(x)+\frac{\partial.F(x)}{\partial x}(h+p)+\frac{\partial^2.F(x)}{2.\partial x^2}(h+p)^2+enz. \quad (2).$$

Indien nu de vergelijkingen (1) en (2) in elkander zullen overgaan, dan moeten de coëfficienten der onderscheidene differentiaalquotienten aan elkander gelijk zijn. Men heeft dus de twee vergelijkingen

$$h+p=2h+h',$$

en

$$(h+h'+k)^2-k^2+h^2=(h+p)^2.$$

Uit de eerste volgt

$$p=h+h',$$

en hierdoor verandert de tweede in

$$(p+k)^2-k^2+h^2=(h+p)^2,$$

of in

$$2pk=2hp,$$

en dus

$$k=h.$$

Uit de vergelijkingen (1) en (2) ziet men gemakkelijk, dat door dezelve verder voort te zetten men nog de vergelijkingen

$$(h+h'+k)^3-k^3+h^3=(h+p)^3,$$

en in het algemeen

$$(h+h'+k)^n-k^n+h^n=(h+p)^n,$$

zoude gevonden hebben; doch stelt men in dezelve $p=h+h'$ en $k=h$, zoo als hier boven gevonden is, dan heeft men

$$(2h+h')^n=(2h+h')^n,$$

zij worden dan alle door de aangenomen waarden van p en k voldaan, en dit zijn dan de eenige voorwaarden die tot de indentiteit der vergelijkingen (1) en (2) vereischt worden, en zonder dezelve kan die indentiteit dan ook niet bestaan, waardoor het gestelde bewezen is.

Aanmerking. Had men h onveranderlijk genomen, zoo zoude het bewijs hetzelfde zijn, alleen zou men dan $h=p$ gevonden hebben; zoodat wanneer men $h=k$ stelt, de reeks waarvan Δ^2y het tweede verschil is, overgaat in

$$F(x), F(x+h), F(x+2h),$$

terwijl zij door $h=k$ veranderlijk te nemen, zijn zoude

$$F(x), F(x+h), F(x+h+2h+h').$$

Door uitbreiding van het hier genomene geval zal even zeer blijken, dat wanneer men uit $y=F(x)$ door achtervolgende aangroeijingen in het algemeen $\Delta^n y$ opmaakt, deze aangroeijing *dan alleen* als het n^{de} verschil zal kunnen beschouwd worden van eene reeks van $n+1$ termen, verkregen door aan den wortel der functie $n+1$ verschillende waardijen te geven, *wanneer* de aangroeijingen van dezelfde veranderlijke elementen der opvolgende functiën y, Δy, $\Delta^2 y$, *enz.* steeds aan elkander gelijk genomen zijn. — En dat wanneer deze aangroeijingen steeds gelijk genomen worden, de bedoelde reeks de vorm

$$F(x), F(x+a), F(x+b) \ldots F(x+l)$$

zal hebben, waarin $a, b \ldots l$, indien men de aangroeijingen zelve als veranderlijk beschouwt, alle willekeurige waarden kunnen hebben; maar waarin $a, b \ldots l$ in eene rekenkunstige reeks moeten zijn, indien alleen x en geenzins hare aangroeijingen veranderlijk zijn.

CXCVI. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Twee cilindervormige vaten hebben met elkander gemeenschap door eene gegevene opening aan den bodem, in de eene vloeit gelijkvormig eene gegevene hoeveelheid water. Men vraagt hoe hoog het water na eenen gegevenen tijd in beide vaten staan zal, als zij in het begin ledig waren?

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Zij ABCD en DBFE (*Fig.* 74) de verticale doorsnede der beide vaten, welke bij B door eene opening van gegevene grootte a gemeenschap hebben, zij verder de inhoud der horizontale doorsnede van het eerste vat $=a^2$, en die van het tweede $=b^2$ en M de hoeveelheid water die in eene secunde in het eerste van ABCD vloeit. Indien nu na eenen zekeren tijd t, de waterspiegel in het eerste vat tot in GI en in het tweede tot in HK gerezen is, en men stelt AG$=x$ in BH$=y$, dan zal in het opvolgende tijddeeltje ∂t de waterspiegel GH tot in LM en HK tot in NO

ge-

gekomen zijn, zijnde $GL = \partial x$ en $HN = \partial y$. Daar nu tevens de geheele ingevloeide watermassa gedurendeden tijd ∂t, is $M\partial t$, waarvan in het eerste vat is gebleven $a^2\partial x$, en in het tweede $b^2\partial y$, zoo moet men blijkbaar hebben

$$M\partial t = a^2\partial x + b^2\partial y \quad \ldots \quad (1).$$

Verder mag men aannemen dat de drukhoogte IH, waarmede het water door de opening bij B gedreven wordt, gedurende het tijddeeltje ∂t onveranderd is gebleven, en dat alzoo, gelijk bekend is, de snelheid van het water in de opening bij B, voorgesteld kan worden door $n\sqrt{IH} = n\sqrt{(x-y)}$. De hoeveelheid water, die er aldus door de opening a, gedurende den tijd ∂t, is doorgevloeid, bedraagt derhalve

$$a\partial t\, n\sqrt{(x-y)},$$

en daar dit nu ook de vermeerdering aanwijst, welke het vat DBFE ondergaan heeft, hebben wij nog

$$b^2\partial y = an\partial t\sqrt{(x-y)} \quad \ldots \quad (2).$$

Hierin voor ∂t zijne waarde uit (1) gesteld, geeft

$$b^2\partial y = an\sqrt{(x-y)}\,\frac{a^2\partial x + b^2\partial y}{M}.$$

Stelt men nu $x-y=z$ en dus $\partial x - \partial y = \partial z$, dan verandert de laatste vergelijking in

$$Mb^2\partial y = an\,(a^2(\partial y+\partial z)+b^2\partial y)\sqrt{z},$$

of wel, door de termen met ∂y aangedaan bijeen te brengen,

$$\{Mb^2 - an(a^2+b^2)\sqrt{z}\}\,\partial y = an\,a^2\sqrt{z}\,\partial z,$$

en dus

$$\partial y = \frac{an\,a^2\sqrt{z}}{Mb^2 - an\,(a^2+b^2)\sqrt{z}}\,\partial z.$$

Deze vergelijking verandert, door te nemen $z = u^2$, in

$$\partial y = \frac{2an\,a^2u^2\partial u}{Mb^2 - an\,(a^2+b^2)u}$$

$$= \frac{2a^2}{an(a^2+b^2)^2}\left\{-an(a^2+b^2)u - Mb^2 + \frac{M^2b^4}{Mb^2 - an(a^2+b^2)u}\right\}\partial u.$$

Waarvan de integraal is

$$y = \frac{2a^2}{an\,(a^2+b^2)^2}\left\{\tfrac{1}{2}an(a^2+b^2)u^2 - Mb^2u\right.$$

$$\left. - \frac{M^2b^4}{an\,(a^2+b^2)}\,Log.\,(Mb^2 - an(a^2+b^2)u\right\} + C;$$

of wel voor u zijne waarde $(x-y)^2$ stellende, heeft men

$$y=\frac{-2a^2}{an(a^2+b^2)^2}\left\{\tfrac{1}{2}an(a^2+b^2)(x-y)+Mb^2(x-y)^2\right.$$
$$\left.+\frac{M^2b^4}{an(a^2+b^2)}Lag.(Mb^2-an(a^2+b^2)(x-y)^2)\right\}+C.$$

Bij het begin zijn de beide vaten te gelijker tijd ledig, en dus voor $x=0$ is $y=0$, en men heeft dus

$$0=-\frac{2a^2}{an(a^2+b^2)^2}\times\frac{M^2b^4}{an(a^2+b^2)}Lag.Mb^2+C.$$

Zoodat, deze waarde van C in de voorgaande vergelijking gesteld, men voor de betrekking, tusschen de hoogte x en y der beide waterspiegels, heeft

$$y=\frac{-2a^2}{an(a^2+b^2)^2}\left\{\tfrac{1}{2}an(a^2+b^2)(x-y)^4+Mb^2(x-y)^2\right.$$
$$\left.+\frac{M^2b^4}{an(a^2+b^2)}Lag.\left(1-\frac{an(a^2+b^2)}{Mb^2}(x-y)^2\right)\right\}\quad(3).$$

Uit de vergelijking (1) volgt nog door te integreren

$$Mt=a^2x+b^2y\quad(4),$$

waarbij geene standvastige behoeft. De vergelijkingen (3) en (4) bevatten nu al wat tot de oplossing van het vraagstuk verlischt wordt. Om echter voor een gegeven tijdsverloop de hoogte van den waterspiegel te vinden, zou men de waarde van x of y uit de eene vergelijking in de andere moeten stellen, en daaruit y of x berekenen. Men ziet echter dat deze inplaatsstelling niet uitvoerbaar is, wegens de logarithmische term, die in de eene vergelijking voorkomt. Vroeg men echter naar den tijd, op welke de beide waterspiegels een bepaald verschil $x-y=v$ zouden hebben, dan geeft de vergelijking (3) onmiddellijk de waterhoogte y, en dan kan men uit (4) den tijd t berekenen.

CXCVII. VRAAGSTUK.

Door L. VAN HEUSDEN.

Van eenen regthoekigen driehoek is de lengte der beide regthoekzijden te zamen 40, *en wanneer men het vierkant van de kortste zijde vermenigvuldigt met de langste, zoo is het product* 6144; *hoe lang is elke zijde?*

OPGELOST *door* L. VAN HEUSDEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. G. VAN KELL, M. G. SNOER, C. VAN SCHAICK, J. BASSAN, M. DE LEON, G. BRANDSTEDER, J. J. GASTMAN, R. LUB-

Lubbers, N. J. Singels, M. H. Godefroi, I. Warnsinck en F. van Heukelom, Jr.

Oplossing *van* L. van Heijden.

Stel de eene regthoekszijde $= x$, dan is de andere $40 - x$, en het voorstel geeft de vergelijking

$$x^2(40 - x) = 6144,$$

waaruit volgt $x^3 - 40x^2 + 6144 = 0$,

of $(x - 16)(x^2 - 24x - 384) = 0$.

Deze vergelijking wordt voldaan door $x = 16$, waardoor de beide regthoekszijden worden 16 en 24, en de hypotenusa $8\sqrt{13}$.

Gebruikt men den tweeden factor der voorgaande vergelijking, zoo heeft men

$$x^2 - 24x - 384 = 0,$$

waaruit volgt

$$x = 12 \pm \sqrt{528} = 12 \pm 4\sqrt{33}$$

men kan dus tot tweede regthoekszijde aannemen

$$x = 12 - 4\sqrt{33},$$

of $$x = 12 + 4\sqrt{33}.$$

De eerste dezer waarden geeft echter eene negatieve zijde, zoodat nog alleen de tweede in aanmerking komt, en deze geeft voor de tweede regthoekszijde $28 - 4\sqrt{33}$, en voor de hypotenusa

$$8\sqrt{(31 - 2\sqrt{33})}.$$

Er bestaan alzoo twee driehoeken die in eenen eigenlijken zin aan het vraagstuk voldoen.

CXCVIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Van eenen vierhoek, in eenen halven cirkel beschreven, gegeven zijnde de drie zijden, zoo vraagt men de andere zijde door berekening te vinden?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, G. Brandstetter, I. Warnsinck, J. Bassan, J. Jonkhert, M. de Leon en J. P. Ott.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat ABCD (*Fig.* 75) de begeerde vierhoek zijn, zoo men dan de beide diagonalen AC en DB trekt, alsmede CE loodregt op DB, dan zal de driehoek DCE gelijkvormig aan den driehoek

ACB zijn, omdat de hoeken BDC en CAB op den zelfden boog rusten, en dat hoek ACB regt is. Men heeft dus, zoo men $AB = a$, $AD = b$, $DC = c$ en $CB = d$ stelt, de evenredigheid

$$DC : CE = AB : CB,$$

of

$$c : CE = a : d,$$

en dus

$$CE = \frac{cd}{a},$$

als ook $DE^2 = DC^2 - CE^2 = c^2 - \frac{c^2 d^2}{a^2} = c^2 \frac{a^2 - d^2}{a^2}$,

en $BE^2 = CB^2 - CE^2 = d^2 - \frac{c^2 d^2}{a^2} = d^2 \frac{a^2 - c^2}{a^2}$.

Maar in den regthoekigen driehoek ADB is ook

$$AB^2 = AD^2 + DB^2,$$

en dus

$$a^2 = b^2 + (DE + EB)^2 = DE^2 + EB^2 + 2\,DE \times EB + b^2$$
$$= \frac{c^2}{a^2}(a^2 - d^2) + \frac{d^2}{a^2}(a^2 - c^2) + b^2 + 2\frac{cd}{a^2}\sqrt{(a^2 - d^2)(a^2 - c^2)},$$

of

$$a^4 = c^2(a^2 - d^2) + d^2(a^2 - c^2) + a^2 b^2 + 2cd\sqrt{(a^2 - d^2)(a^2 - c^2)} \quad (1).$$

Hieruit vindt men nu terstond AD of b door de vergelijking

$$b = \frac{1}{a}\sqrt{\{a^4 - a^2(d^2 + c^2) + 2c^2 d^2 - 2cd\sqrt{(a^2 - d^2)(a^2 - c^2)}\}}.$$

En daar men, uit den aard der zaak, voor CB of d dezelfde uitkomst zou verkregen hebben, indien men uit D eene loodlijn op AC had neder gelaten, en alsdan de overeenkomstige berekeningen verrigt had, zoo kan men uit de voorgaande vergelijking d of BC vinden, door overal voor b, d en voor d, b te schrijven.

Men kan echter de formule (1) nog eenvoudiger herleiden; want men heeft, door de wortelgrootheid af te zonderen,

$$a^6 - a^2 c^2 - a^2 d^2 + 2c^2 d^2 - a^2 b^2 = 2cd\sqrt{(a^2 - d^2)(a^2 - c^2)},$$

of ook $\{a^2(a^2 - c^2 - d^2 - b^2) + 2c^2 d^2\}^2 = 4c^2 d^2 (a^2 - d^2)(a^2 - c^2)$,

en dus $a^4(a^2 - b^2 - c^2 - d^2)^2 + 4c^4 d^4 + 4c^2 d^2 a^2 (a^2 - b^2 - c^2 - d^2)$
$$- 4c^2 d^2 (a^2 - d^2)(a^2 - c^2) = 0,$$

of de beide laatste termen vereenigende,

$$a^4(a^2 - b^2 - c^2 - d^2)^2 + 4a^4 a^4$$
$$+ 4c^2 d^2 \{a^2(a^2 - b^2 - c^2 - d^2) - a^2(a^2 - c^2 - d^2) - c^2 d^2\} = 0,$$

en dus

a^4

$a^6 (a^6 - b^2 - c^2 - d^2)^2 + 4c^4 d^4 - 4c^2 d^2 (a^6 b^2 + c^2 d^2) = 0$,

of $a^4 (a^2 - b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4 a^2 b^2 c^2 d^2 = 0$,

en derhalve $a (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) = 2 b c d$,

en uit deze vergelijking heeft men nu eindelijk

$$d = -\frac{bc}{a} \pm \sqrt{\left\{a^2 - b^2 - c^2 + \frac{b^2 c^2}{a^2}\right\}}.$$

Terwijl de waarde van a of van de middellijn door eene derde-magtsvergelijking gevonden wordt.

De waarde van b vindt men nu eenvoudiger, namelijk

$$b = \frac{cd}{a} \pm \sqrt{\left\{a^2 - b^2 - d^2 + \frac{c^2 d^2}{a^2}\right\}}.$$

Waartoe dan ook de boven gevondene waarde van b herleid kan worden.

CXCIX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt de waarde van x uit de vergelijking $x - \frac{32}{7} = \frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{12}{x^3} - \frac{24}{x^4} +$ *enz.?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, M. DE LEON, J. J. GASTMAN, B. LUBBERS, M. L. GOEDE, I. WARNSINCK, R. SPRUIT, J. P. OTT, J. JONKHERT *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De voorgeſtelde vergelijking kan geſchreven worden onder den vorm

$$x - \frac{32}{7} = \left(\frac{3}{x} + \frac{12}{x^3} + enz.\right) - \left(\frac{6}{x^2} + \frac{24}{x^4} + enz.\right) \quad . \quad . \quad (1).$$

De eerſte oneindige term is eene meetkunstige reeks, waarvan de eerſte term $\frac{3}{x}$ zijnde, de gemeene rede $\frac{4}{x^2}$ is, derzelver ſom is dan in het algemeen

$$\frac{3}{x} \cdot \frac{\left(\frac{4}{x^2}\right)^n - 1}{\frac{4}{x^2} - 1},$$

indien namelijk het getal termen $= n$ is. Doch daar men hier een oneindig aantal termen onderſtelt, zal n oneindig genomen moeten worden; en daar van den anderen kant deze ſom echter eene bepaalde waarde dient te hebben, zoo moet, zal aan het vraagſtuk voldaan kunnen worden, de reeks afdalende en dus $\frac{4}{x^2}$ eene eigentlijke breuk wezen. De oneindige magt eener breuk $= 0$ zijnde, zoo verandert de voorgaande ſom in

$$\frac{3}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{3x}{x^2 - 4}.$$

De tweede oneindige term der vergelijking (1) heeft om dezelfde rede tot ſom

$$\frac{6}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{6}{x^2 - 4}.$$

De vergelijking (1) gaat dus over in

$$x - \frac{32}{7} = \frac{3x}{x^2 - 4} - \frac{6}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{3(x-2)}{x^2 - 4} = \frac{3}{x+2},$$

of wel in $(7x - 32)(x + 2) = 21.$

Deze vergelijking opgelost zijnde, geeft tot wortels

$$x = \frac{9}{7} + \frac{26}{7} = 5,$$

en $$x = \frac{9}{7} - \frac{26}{7} = -\frac{17}{7}.$$

CC. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De inhoud van eenen regelmatigen twaalfhoek gegeven zijnde, vraagt men naar den ſtraal van den ingeſchreven cirkel?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, L. WARNINCK, G. BRANDSTEDER, M. H. GODEFROI, J. BASSAN, J. P. OTT, J. JONKHERT, R. SPRUIT *en* M. L. GORDE.

OPLOSSING van W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De inhoud van den twaalfhoek $= a^2$ ſtellende, dan is de inhoud

hoek van een der driehoeken, gevormd door eene der zijden en de ſtralen uit derzelver einden naar het middelpunt van den ingeſchrevenen cirkel getrokken, $= \frac{a^2}{12}$. De hoek aan het middelpunt door deze beide ſtralen gevormd is $\frac{360}{12} = 30°$. Daar nu de loodlijn uit het middelpunt op de zijde nedergelaten, dezen tophoek midden door deelt, zoo is de halve zijde van den twaalfhoek gelijk aan deze loodlijn vermenigvuldigd met de tangens van 15°. Is dus die loodlijn $= x$, dan is de halve zijde $= x\,Tang.\,15°$. En daar nu de inhoud van den driehoek gelijk is aan het produkt van de halve zijde met de loodlijn, zoo hebben wij de vergelijking

$$\frac{a^2}{12} = x^2\,Tang.\,15°,$$

of $$x = 2a\sqrt{\left(\frac{Cot.\,15°}{12}\right)},$$

Maar nu is $$Tang.\,\tfrac{1}{2}\phi = \frac{1 - Cos.\,\phi}{Sin.\,\phi},$$

alzoo $$Tang.\,15° = \frac{1 - Cos.\,30°}{Sin.\,30°}.$$

En daar $Sin.\,30° = \frac{1}{2}$ en $Cos.\,30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ is, zoo heeft men

$$Tang.\,15° = \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}),$$

of $$Cot.\,15 = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} = 8(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}).$$

Zoodat wij dan hebben, voor den ſtraal van den ingeſchreven cirkel,

$$x = a\sqrt{\frac{2}{3}}(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{a}{3}\sqrt{(6 + 3\sqrt{3})}.$$

CCI. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Er is een getal van vier cijferletters; het aantal der honderdtallen is gelijk aan dat der eenheden, en dat der duizendtallen de helft van dat der tientallen; de wortel van de ſom der duizend en honderdtallen is één minder dan de wortel van het vermenigvuldigde der tientallen en eenheden, ook is het produkt der honderdtallen

en eenheden gelijk aan de zesde magt van het cijfer der tientallen. Men vraagt naar het getal?

Opgelost *door* M. H. Godefroi, J. Badon Ghyben, N. J. Singels, B. Lubbers, M. de Leon, M. Salomo, M. L. Goede, R. Spruit, M. G. Snoer, J. Bassan, C. van Schaick, J. P. Ott, J. Jonkhert, G. Brandsteder, F. van Heukelom Jr., I. Warnsinck, B. G. van Kell, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Messchert van Vollenhoven *en* J. J. Gastman.

I. Oplossing, *van* M. H. Godefroi.

Zij het aantal honderdtallen $= x$, dan is dat der eenheden mede $= x$; het aantal der duizendtallen $= y$ nemende, is dat der tientallen $2y$, en het voorstel geeft de twee vergelijkingen

$$\sqrt{(x+y)} = \sqrt{2xy - 1} \text{ en } x^2 = 64y^6.$$

De tweede vergelijking geeft $x = 8y^3$, waaruit volgt $2xy = 16y^4$, hierdoor verandert de eerste vergelijking in

$$\sqrt{(x+y)} = 4y^2 - 1,$$

of in $\sqrt{(8y^3+y)} = 4y^2 - 1,$

en dus in $8y^3 + y = (4y^2 - 1)^2.$

Hetwelk ontwikkeld zijnde, geeft

$$16y^4 - 8y^3 - 8y^2 - y + 1 = 0,$$

waarvoor men schrijven kan

$$16y^4 - 16y^3 + 8y^3 - 8y^2 - y + 1 = 0,$$

of $16y^3(y-1) + 8y^2(y-1) - (y-1) = 0,$

en dus $(y-1)(16y^3 + 8y^2 - 1) = 0.$

Aan deze vergelijking wordt dan voldaan door $y = 1$ te nemen, en dit geeft dan $x = 8$, en voor het getal 1828.

II. Oplossing, *van* J. Badon Ghyben.

Het aantal der eenheden en honderdtallen even groot zijnde, zoo is hun product eene tweede magt, wiens zesde magtswortel de tientallen moet opleveren. Zij dus dit aantal eenheden $= x$, dan is dat der tientallen $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x}$. Daar men nu voor x geen getal boven 9 nemen mag, en het echter tevens eene derde magt moet zijn, kan men voor x slechts 8 of 1 nemen. In het laatste geval zou men echter geen geheel getal vinden voor de duizendtallen; nemende dus $x = 8$, dan wordt het aantal der tientallen $= 2$, en dat der duizendtallen $= 1$, en alzoo het getal 1828. Door hier, van de voorwaarde gebruik te maken, dat

gee-

geene der cijfers grooter dan negen mag zijn, heeft men eene der voorwaarden van het vraagſtuk kunnen weg laten.

CCII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Zoek een getal hetwelk door drie getallen, waarvan het tweede 17 meer dan het eerſte, en het derde 19 meer dan het tweede zij, zonder overſchot kan gedeeld worden; onder de bepaling dat het eerſte quotient 102 meer zij dan het tweede, en 108 meer dan het derde? (*)

OPGELOST *door* J. BASSAN, M. H. GODEFROI, B. LUBBERS, M. SALOMO, M. G. SNOER, N. J. SINGELS, M. DE LEON, J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. JONKHERT, B. G. VAN KELL, M. L. GORDE, R. SPRUIT, I. WARNSINCK, J. J. GASTMAN, G. BRANDSTEDER *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel het gevraagde getal voor door p, en de drie deelen door x, $x+17$ en $x+17+19=x+36$. Dan moet volgens het vraagſtuk

$$\frac{p}{x}-\frac{p}{x+17}=102,$$

en

$$\frac{p}{x}-\frac{p}{x+36}=108$$

zijn. Deze beide vergelijkingen kan men ſchrijven

$$p(x+17)-px=102x(x+17),$$

en

$$p(x+36)-px=108x(x+36),$$

of

$$17p=102x(x+17),$$

en

$$36p=108x(x+36).$$

Deze beide vergelijkingen door elkander deelende, komt er

$$\frac{17}{36}=\frac{102(x+17)}{108(x+36)}=\frac{17(x+17)}{18(x+36)},$$

of

$$x+36=2(x+17),$$

en dus

$$x=2.$$

Waaruit volgt, door deze waarde in de eerſte vergelijking te ſtellen

p

(*) J. DE GELDER, *Regenſchen der Stelkunst*, bladz. 247, vraag 42.

$$\frac{p}{2}-\frac{p}{19}=102,$$

of $17p=3876,$

en dus $p=228.$

CCIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt eene rekenkunstige reeks van 6 termen, in geheele getallen beſtaande, zoodanig, dat het product des eerſten en zesden terms een vierkant, het verſchil van den tweeden en vijfden eene derde magt, en de ſom van den derden en vierden term eene vierde magt zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, L. J. ULMAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stellen wij voor de termen de reeks

$$\tfrac{1}{2}x^4-5y,\ \tfrac{1}{2}x^4-3y,\ \tfrac{1}{2}x^4-y,$$
$$\tfrac{1}{2}x^4+y,\ \tfrac{1}{2}x^4+3y \text{ en } \tfrac{1}{2}x^4+5y;$$

dan is de ſom van den derden en vierden term eene vierde magt, en er is alzoo aan eene voorwaarde voldaan. Het verſchil der tweeden en vijfden terms is $6y$, en daar dit eene derde magt moet zijn, kan men ſtellen $6y=p^3$. Het product der uiterſten is $\frac{1}{4}x^8-25y^2=\frac{1}{4}x^8-25\frac{p^6}{36}$, waarvoor men ſchrijven kan

$$\frac{9x^8-25p^6}{36}.$$

Men zal dan nu nog maar $9x^8-25p^6$ tot een vierkant moeten maken. Daartoe ſtelle men $p=qx$, dan verandert de laatſte uitdrukking in:

$$9x^8-25q^6x^6=x^6(9x^2-25q^6),$$

waardoor het vraagſtuk terug gebragt is om $9x^2-25q^6$ tot een vierkant te maken; en daar dit reeds het verſchil van twee vierkanten is, zoo ſtellen wij

$$9x^2=(u^2+v^2)^2,$$

en $25q^6=4u^2v^2,$

dan is $9x^2-25q^6=(u^2-v^2)^2,$

en men heeft $3x=u^2+v^2,$

als mede $5q^3=2uv.$

Men

Men neme nu $y = 5 \cdot 2^2 v^2$,
dan is $5q^3 = 5 \cdot 2^3 v^3$,
of $q = 2v$,
en $3x = 400v^4 + v^2$.

Zoo men derhalve voor v een veelvoud van 6 neemt, zal men voor x een geheel getal vinden, en daar dan zelfs het tweede lid der laatste vergelijking door 6^2 deelbaar zal wezen, zoo zal men voor x een even getal verkrijgen, en derhalve zal $\frac{1}{2}x^4$ mede een geheel getal zijn; en daar nu eindelijk $y = \frac{p^3}{6} = \frac{q^3 x^3}{6}$ wordt, en q deelbaar door 6 is, omdat v deze eigenschap heeft, zal ook voor y een geheel getal gevonden worden. Het vraagstuk is derhalve in geheele rationale getallen opgelost.

CCIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar drie geheele getallen, de eigenschap hebbende, dat hunne som een vierkant, en 100 *maal het eerste plus* 10 *maal het tweede plus het derde getal eene derde magt zij?*

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. BASSAN, M. DE LEON, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK, I. WARNSINCK, G. BRANDSTEDER, J. P. OTT, J. JONKHERT, L. J. ULMAN *en* M. H. GODEFROI.

I. OPLOSSING, *van* B. LUBBERS.

Men stelle voor de drie getallen x^2, $2xy$ en y^2, dan is aan de eerste voorwaarde voldaan, dewijl hunne som is $(x+y)^2$; volgens de tweede voorwaarde moet

$$100x^2 + 20xy + y^2 = (10x + y)^3$$

eene derde magt zijn; en daar deze uitdrukking reeds bovendien eene tweede magt is, zal het eene zesde magt moeten worden; men stelle dan

$$10x + y = u^3.$$

Men heeft dan slechts voor m en x willekeurige getallen te nemen, doch zoodanig dat $m^3 - 10x$ positief zij, en dan zal men altijd getallen aan de vraag voldoende kunnen vinden. Voor $m = 3$ en $x = 2$ wordt $y = 7$, en de getallen zijn 4, 28 en 49.

II. OPLOSSING, *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men neme voor de getallen

x^3, $2x^3$ en $5x^3$.

dan is, volgens de tweede voorwaarde,

$$100x^3+20x^3+5x^3=125x^3=(5x)^3,$$

aan deze voorwaarde is nu voldaan, doch nu moet nog de ſom der getallen of $8x^3=(2x)^3$ een vierkant zijn. Alle evene vierkanten voor $2x$ genomen, geven voor x eene waarde in geheele getallen, en alzoo is daardoor dan ook aan de eerſte voorwaarde voldaan. Stellende, bij voorbeeld, $2x=36$, dan is $x=18$, en de getallen zijn 5832, 11064 en 29165. Voor $2x=4$ heeft men even eens de getallen 8, 16 en 40, en zoo voor alle andere evene tweede magten.

CCV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt eene meetkunstige reeks van drie termen te vinden, zoodanig dat de ſom dezer reeks door 7, en het verſchil der uiterſte termen door 3 deelbaar zij, zonder dat eene der termen door 3 deelbaar zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, B. LUBBERS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. DE LEON, G. BRANDSTEDER, L. J. ULMAN, M. SALOMO, N. J. SINGELS, I. WARNSINCK, M. G. SNOER, J. JONKHERT, C. VAN SCHAICK *en* M. H. GODEBROI.

I. OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Men ſtelt voor de reeks x, xy en xy^2, dan moet, volgens de eerſte voorwaarde,

$$x(1+y+y^2)$$

deelbaar door 7 zijn, hiertoe kan men nemen $x=7n$, of zoo men eens verlangde dat geen der termen van de reeks door 7 deelbaar mogte zijn, zoo moet $1+y+y^2=7n$ wezen. Daarenboven moet volgens de tweede voorwaarde $xy^2-x=x(y^2-1)=x(y-1)(y+1)$ door 3 gedeeld kunnen worden. Men neme daartoe $y-1=3p$, dan is $y=3p+1$, en men heeft voor $1+y+y^2$

$$1+3p+1+9p^2+6p+1=3+9p+9p^2$$
$$=3(1+3p+3p^2).$$

Hiervoor kan men ſchrijven

$$3(1+3p+3p^2)=7(p^2+p)+2p^2+2p+3.$$

Stelt men nu hier $q=p-1$, dan heeft men

$$7(q+1)(q+2)+2(q+1)^2+2(q+1)+3$$
$$=7(q+1)(q+2)+2q^2+6q+7$$
$$=7\{1+(q+1)(q+2)\}+2q(q+3),$$

zoodra men derhalve voor q of voor $q+3$ een veelvoud van 7 neemt, zal aan de tweede voorwaarde voldaan zijn. En als men nu voor x geen veelvoud van drie neemt, dan zal ook geen der termen der reeks daardoor deelbaar zijn; want $y=3p+1$ zijnde, is nooit door 3 deelbaar. Neemt men tot voorbeeld $q=4$, dan is $p=5$, dus $y=16$, zoodat nemende $x=1$, dan is de reeks 1, 16, 256.

II. Oplossing *door* B. Lubbers.

Men ſtelle voor de reeks x, ax en a^2x, dan is derzelver ſom

$$x(1+a+a^2),$$

zoo men nu $a=2$ neemt, wordt $1+a+a^2=7$, hierdoor wordt de ſom der termen deelbaar door 7, en daar men alle getallen, die niet deelbaar zijn door 3, voor kan ſtellen onder den vorm $3n-1$ en $3n+1$, zoo zal men een dezer vormen voor x moeten aannemen, en daar nu alsdan de reeks wordt $3n-1$, $2(3n-1)$ en $4(3n-1)$, of wel $(3n+1)$, $2(3n+1)$ en $4(3n+1)$, in welke beide gevallen het verſchil der uiterſte termen door 3 deelbaar is, ziet men dat beide deze reekſen geheel aan de vraag voldoen. Voor $n=1$ geeft de eerſte reeks de getallen 2, 4 en 8, en voor $n=0$ geeft de tweede reeks 1, 2 en 4, welke de kleinſt mogelijke getallen zijn.

CCVI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Van eenen driehoek is bekend de ſom der opſtaande zijden, de tophoek en de lijn die uit den tophoek op het midden van de bazis valt. Men vraagt dezen driehoek te bepalen?

Opgelost *door* J. Bassan, M. de Leon, W. J. C. Rammelman Elsevier, I. Warnsinck, J. Jonkhert *en* J. P. Ott.

Oplossing *van* J. Bassan.

Zij ABC (*Fig.* 76) de begeerde driehoek, waarin *hoek* ABC $=\alpha$, AB + BC $=a$, BD $=b$ en AD $=$ DC zij; ſtellende dan AB $=x$ en *hoek* BAC $=\phi$, zoo heeft men

$$AB : BC = Sin.\,BCD : Sin.\,BAC,$$

dat is $$x : a-x = Sin.(\alpha+\phi) : Sin.\,\phi \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Als-

Alsmede $BC : AC = Sin.\phi : Sin.\alpha$,

of $a - x : AC = Sin.\phi : Sin.\alpha$,

derhalve $AC = \frac{(a-x)\ Sin.\alpha}{Sin.\phi}$.

Maar nu is ook

$$AB^2 + BC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$$
$$= 2BD^2 + \tfrac{1}{2}AC^2,$$

en dus $x^2 + (a-x)^2 = 2b^2 + \frac{1}{2}\frac{(a-x)^2\ Sin^2.\alpha}{Sin^2.\phi}$. (2).

Uit (1) heeft men door de ontwikkeling van $Sin.(\alpha+\phi)$

$$x\ Sin.\phi = (a-x)(Sin.\alpha\ Cos.\phi + Sin.\phi\ Cos.\alpha),$$

en dus $Sin.\phi(x - (a-x)\ Cos.\alpha) = (a-x)\ Sin.\alpha\ Cos.\phi$,

of door in het vierkant te verheffen

$$Sin^2.\phi(x - (a-x)\ Cos.\alpha)^2 = (a-x)^2\ Sin^2.\alpha\ (1 - Sin^2.\phi);$$

en dus

$$Sin^2.\phi\{(x - (a-x)\ Cos.\alpha)^2 + (a-x)^2 Sin^2.\alpha\} = (a-x)^2\ Sin^2.\alpha,$$

of $\{x^2 - 2(a-x)x\ Cos.\alpha + (a-x)^2\}\ Sin^2.\phi = (a-x)^2 Sin^2.\alpha$,

en dus $\frac{(a-x)^2}{Sin^2.\phi} = \frac{x^2 - 2(a-x)\,x\ Cos.\alpha + (a-x)^2}{Sin^2.\alpha}$.

Deze waarde gesteld in (2) geeft

$$x^2 + (a-x)^2 = 2b^2 + \tfrac{1}{2}(x^2 - 2(a-x)\,x Cos.\alpha + (a-x)^2),$$

en na herleiding

$$x^2 + (a-x)^2 + 2(a-x)\,x\ Cos.\alpha = 4b^2 \quad . \quad (3).$$

Waaruit volgt

$$2x^2(1 - Cos.\alpha) - 2ax(1 - Cos.\alpha) = 4b^2 - a^2,$$

of wel $x^2 - ax = \frac{4b^2 - a^2}{2(1 - Cos.\alpha)} = \frac{4b^2 - a^2}{4\ Sin^2.\frac{1}{2}\alpha}$;

en hieruit heeft men

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{4b^2 - a^2}{4\ Sin^2.\frac{1}{2}\alpha}\}}$$

$$= \tfrac{1}{2}a \pm \frac{1}{2\ Sin.\frac{1}{2}\alpha}\sqrt{(4b^2 - a^2 Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha)} \quad . \quad (4).$$

Dewijl, zoo als bekend is, de zijde AC gelijk is aan

$$\sqrt{\{AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC\ Cos.\ ABC\}},$$

$$= \sqrt{\{x^2 + (a-x)^2 - 2(a-x)\,x\ Cos\ \alpha\}},$$

en dat men volgens de vergelijking (3) heeft

$\sqrt{x^2+(a-x)^2+2(a-x)\times Cos.\ a} = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}BD.$

Zoo blijkt hieruit, dat de waarde van 2 BD de zijde is van eenen driehoek wiens zijden dezelfde zijn als van den driehoek ABC, doch wiens tophoek het supplement van die des driehoeks ABC is.

Indien men uit D de lijn DE evenwijdig aan AB trekt, zoo is blijkbaar $EB = AE = \frac{1}{2}(a-x)$ en $DE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}x$, alsmede *hoek* $DEB = 180° - BBA = 180 - a$, wij hebben dus in den driehoek DEB

$$DB^2 = b^2 = \tfrac{1}{4}(a-x)^2 + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}(a-x)\times Cos.\ a,$$

of $$4b^2 = (a-x)^2 + x^2 + 2(a-x)\times Cos.\ a.$$

Hetwelk juist de vergelijking (3) is. De oplosſing van het vraagſtuk had dus ook onmiddelijk uit de beſchouwing van den driehoek DEB kunnen worden afgeleid.

Uit de formule (4) ziet men dat $a^2 < \frac{4b^2}{Cos^2.\frac{1}{2}a}$ of $a < \frac{2b}{Cos.\frac{1}{2}a}$ moet zijn, want dat anders het vraagſtuk onmogelijk wordt; zoo nu de driehoek gelijkbeenig wordt is juist $\frac{1}{2}a\ Cos.\ Ba = b$, en dit geeft alzoo de uiterſte grens aan, waarin het vraagſtuk nog opgelost kan worden. Men ziet verder, dat er in het algemeen twee antwoorden of waarden voor x gevonden zijn. Doch het is blijkbaar dat men ſlechts eenen driehoek verkrijgt, omdat deze beide waarden juist de beide zijden van den driehoek aanwijzen. De zijde, die in het eerſte geval ter regter zijde komt, valt in het tweede geval aan de linker zijde.

Aanmerking *van* J. P. Delprat. Indien men in de vergelijking (3) a of de ſom der opſtaande zijden $= o$ ſtelt, vindt men $x = \pm\frac{2b}{Sin.\frac{1}{2}a}$. Deze uitkomst ſchijnt bij den eerſten oogopſlag vreemd, omdat men wellig denken zoude dat een driehoek, waarvan de ſom der opſtaande zijden gelijk nul is, niet beſtaan kan. Deze ſchijnbare tegenſtrijdigheid verdwijnt echter, wanneer men bedenkt, dat een driehoek zeer wel negatieve zijden kan hebben, en dat derhalve zoo de eene zijde negatief, en juist zoo groot is als de poſitieve zijde, zeer wel de ſom dezer zijden nul kan wezen, zonder dat de driehoek ophoudt te beſtaan. Het negatief worden der zijden kan men op de volgende wijze duidelijk maken. De hoek $ABC = a$ gemaakt hebbende, zoo zal men

men, voor elke gegevene waarde van a en b, uit (3) de waarde van x en $a-x$ berekenen, en dezelve van B af naar A en C kunnen uitzetten. Doch daar men dan de positieve waarden van x van B naar A telt, zoo moeten de negatieve waarden van B naar F op het verlengde van AB uitgezet worden. Is dus x negatief dan is $a-x$ zeker positief, en moet dus van B naar C worden uitgezet, en men verkrijgt alzoo den driehoek BFC. Nu is voor $a=0$, $x=\pm\frac{b}{Sin.\frac{1}{2}\alpha}$, en daar $a=0$ is, zoo is voor $x=+\frac{b}{Sin.\frac{1}{2}\alpha}$, $a-x=-\frac{b}{Sin.\frac{1}{2}\alpha}$ en omgekeerd; de driehoek is alzoo gelijkbeenig of BF = BC. Neemt men dan nu BG = b zoo is dan ook

$$BF=\frac{BG}{Cos.FBG}=\frac{b}{Cos.\frac{1}{2}(180-\delta)}=\frac{b}{Sin.\frac{1}{2}\delta}$$

overeenkomstig hetgeen de formule (3) heeft gegeven.

CCVII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Hoe veel regthoekige driehoeken kan men vinden, wanneer de zijden in geheele getallen uitgedrukt zijn, en alwaar het aantal vierkante eenheden van den inhoud gelijk is aan dat van de lengte eenheden in de som der zijden begrepen?

OPGELOST *door* K. SMIT, M. DE LEON, J. BASSAN, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, J. P. OTT, J. JONKHERT, B. LUBBERS, I. WARNSINCK, M. H. GODEFROI, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* G. BRANDSTEDER.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Men stelle voor de beide regthoekszijden x^2-y^2 en $2xy$, dan is de schuinsche zijde $\sqrt{((x^2-y^2)^2+4x^2y^2)}=x^2+y^2$, de som der zijden is dan $x^2-y^2+2xy+x^2+y^2=2x^2+2xy$, het product der regthoekszijden $2xy(x^2-y^2)$, en derhalve de inhoud van den driehoek $xy(x^2-y^2)$, de laatste voorwaarde van het voorstel geeft dus

$$2x^2+2xy=xy(x^2-y^2),$$

deelende door x

$$2(x+y)=y(x^2-y^2)=y(x-y)(x+y),$$

of

$$2=y(x-y),$$

waar-

waaruit volgt $x = \frac{y^2+2}{y} = y + \frac{2}{y}$.

Nu mag men voor y niet dan geheele getallen nemen, omdat de zijden rationaal moeten blijven, en, daar nu y een deeler van 2 moet zijn, volgt hieruit, dat men voor y niet anders dan 1 of 2 kan ſtellen. Er zijn dus twee driehoeken mogelijk. Voor $y=1$ is $x=3$ en de zijden 8, 6 en 10; en voor $y=2$ is $x=3$ en de zijden 5, 12 en 13.

CCVIII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Hoe veel regthoekige driehoeken kan men vinden, alwaar de hypotenuſa 221 *zijnde, de zijden in geheele getallen worden uitgedrukt?*

OPGELOST *door* K. SMIT, L. J. ULMAN, J. P. OTT, J. JONKHERT, B. LUBBERS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, G. BRANDSTEDER, N. J. SINGELS *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Laten de regthoekszijden zijn x en y, dan heeft men dadelijk de vergelijking $221^2 = x^2 + y^2$ of $y^2 = 221^2 - x^2$, ſtelt men nu

$$y^2 = (221 - nx)^2;$$

dan is $221^2 - x^2 = (221 - nx)^2$;

of, na ontwikkeling,

$$442nx - x^2 - n^2x^2 = 0;$$

en dus $442n - x - n^2x = 0$,

waaruit men heeft $x = \frac{442n}{n^2+1}$.

Nu kan geene der factoren van n een factor zijn van n^2+1, zal dus x een geheel getal wezen, dan moet n^2+1 een factor van 442 zijn. Nu is 442 deelbaar door 1, 2, 13, 17, 26, 34, 221 en 442; deze zijn dus vooreerst de waarden die men aan n^2+1 geven kan, waaruit echter alleen bruikbaar zijn diegenen, welke voor n rationale waarden geven.

Voor $n^2+1=1$ zoude $n^2=0$ zijn en kan alzoo hier niet dienen; voor $n^2+1=2$ is $n=1$, alzoo is deze onderſtelling bruikbaar, $n^2+1=13$ daarentegen niet, doch $n^2+1=17$ geeft $n=4$, $n^2+1=26$ geeft $n=5$; de deelers 34 en 221 zijn wederom niet bruikbaar, doch $n^2+1=442$ geeft $n=21$. Er

zijn dan vier waarden voor n, die x en y tot geheele getallen maken, en alzoo vier driehoeken die aan de vraag voldoen. Voor $n=1$ is dan $x=221$, doch alsdan is de andere regthoekszijde $=0$. Voor $n=4$ is $x=104$ en $y=195$; voor $n=5$ is $x=85$ en $y=204$; eindelijk voor $n=21$ is $x=21$ en $y=220$. Wij vinden dus flechts drie onderfcheidene driehoeken, die, in eenen eigenlijken zin, aan het vraagftuk voldoen.

Doch het is niet noodzakelijk voor n juist een geheel getal te nemen, het is genoegzaam dat x en nx zulks worden; men moet dus nog onderzoeken of er alzoo geene breuken voor n genomen kunnen worden, die aan deze voorwaarden voldoen. Men ftelle dan $n=\frac{m}{r}$; waarbij m en r geene factoren gemeen moeten hebben, alsdan is

$$x=\frac{442\frac{m}{r}}{\frac{m^2}{r^2}+1}=\frac{442\,mr}{m^2+r^2},$$

en

$$nx=\frac{442\frac{m^2}{r^2}}{\frac{m^2}{r^2}+1}=\frac{442\,m^2}{m^2+r^2}.$$

Nu kunnen m^2+r^2 geene factoren gemeen hebben met m noch r, en zullen dus x en nx geheele getallen zijn, dan moet m^2+r^2 deeler zijn van 442; wij hebben dan nog te onderzoeken of de reeds vroeger gebruikte deelers niet in twee rationale vierkanten gefplitst kunnen worden, zonder echter daaronder het vierkant der eenheid mede te rekenen, omdat alsdan m^2+r^2, overgaat in m^2+1, welke vorm reeds gebruikt is. Ten einde nu de deelers van 442 in twee vierkanten te verdeelen, heeft men flechts van elk, achtervolgens de vierkanten van 2, 3, 4 enz. af te trekken, zoo lang zulks mogelijk is, en te zien bij welke aftrekking er een vierkant over blijft. Voor $m^2+r^2=1$ is dit blijkbaar onmogelijk, even als bij $m^2+r^2=2$. Voor $m^2+r^2=13$ vindt men, door de aftrekking van 2^2, tot overfchot 9 of 3^2, alzoo is voor $m=2$ en $r=3$ de verdeeling mogelijk; deze waardijen geven $x=204$, en alzoo eene zijde die wij reeds

hier

hier voren gevonden hebben. Voor $m^2+r^2=17$ kan de verdeeling, behalve voor $r^2=1$, geen plaats hebben. Voor $m^2+r^2=26$ is de verdeeling weder onmogelijk. Voor $m^2+r^2=34$ is de verdeeling mogelijk omdat $34+3^2=25=5^2$; nemende dan $m=5$ en $r=3$, zoo word $x=195$, ook weder eene der verdeelingen die wij reeds vroeger gevonden hadden. Voor $m^2+r^2=221$ vindt men $221-5^2=196=14^2$, dus $m=5$ en $r=14$, deze waarden geven $x=140$ en $y=171$, welke vroeger niet gevonden waren. Verder kan 221 ook nog verdeeld worden in 10^2+11^2, en deze waarden gebruikende vinden wij $x=220$, eene waarde ook vroeger reeds gevonden.

Al de gevondene uitkomsten dan bij elkander nemende, blijkt het, dat er vier driehoeken in eenen eigenlijken zin aan het vraagstuk voldoen; te weten

$x=104$ $y=195$,
$x=85$ $y=204$,
$x=21$ $y=220$,
en
$x=140$ $y=171$.

CCIX. VOORSTEL.

Door J. Jonkhart.

In elken vierhoek, is het vierkant op het dubbel der lijn, die het midden der diagonalen vereenigt, gelijk aan de som der vierkanten op de zijden, verminderd met de som der vierkanten op de diagonalen. Men vraagt naar het bewijs?

Opgelost *door* J. Jonkhart, J. Bassan, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. P. Ott *en* I. Warnsinck.

Oplossing *van* J. Jonkhart.

Laat ABCD (*Fig. 77*) een vierhoek zijn waarin de diagonalen AC en BD getrokken zijn, en waarin FG het midden der diagonalen vereenigt. Nu is in den driehoek ABC

$$AB^2+BC^2=2AF^2+2FB^2,$$

en in den driehoek ADC

$$AD^2+DC^2=2AF^2+2FD^2.$$

Hiervan is de som

$$AB^2+BC^2+AD^2+DC^2=4AF^2+2FD^2+2FB^2.$$

Maar nu is $4AF=AC^2$, en

$$FD^2+FB^2=2FG^2+2BG^2;$$

Hierdoor wordt dan de voorgaande som

$$AB^2+BC^2+AD^2+DC^2=AC^2+4FG^2+4BG^2,$$
$$=AC^2+4FG^2+BD^2,$$

of $AB^2+BC^2+AD^2+DC^2-(AC^2+BD^2)=(2FG)^2$,
hetgeen te bewijzen was.

AANMERKING. Indien de vierhoek overgaat in een parallelogram, dan is de $FG=0$, omdat alsdan de diagonalen elkander midden door deelen, en men heeft alsdan de bekende eigenschap dat $AB^2+BC^2+AD^2+DC^2=AC^2+BD^2$ is, welke eigenschap dan slechts een bijzonder geval van eene meer algemene is.

CCX. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

Van eenen scherphoekigen driehoek is gegeven de som der opstaande zijden $=35$, *en het verschil tusschen de kortste opstaande zijde en de loodlijn* $=3$, *en de basis* 25. *Men vraagt denzen driehoek te bepalen en naar de lengte der loodlijn?*

OPGELOST *door* C. VAN SCHAICK, B. LUBBERS, M. DE LEON, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, J. JONKHERT, G. BRANDSTEDER, M. H. GODEFROI, J. P. OTT *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* C. VAN SCHAICK.

Zij ABC (*Fig.* 78) de begeerde driehoek, waarin $AC=25$, $AB+BC=35$ en $BA-AD=3$ is. Men stelle $BC=x$, $AB=y$, dan heeft men dadelijk de vergelijking

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC\times DA,$$

of
$$x^2=y^2+25^2-2.25.DA \quad \ldots \quad (1).$$

Maar nu is ook

$$BD^2=AB^2-AD^2,$$

of
$$BD^2=y^2-AD^2 \quad \ldots \quad (2),$$

en nu is
$$AB-AD=3,$$

dat is:
$$y-AD=3,$$

of
$$BD=y-3;$$

hetwelk in (2) gesteld geeft

$$(y-3)^2=y^2-AD^2;$$

en na ontwikkeling $9-6y+AD^2=0$,
of
$$AD^2=6y-9.$$

Deze waarde in (1) gesteld geeft

$$x^2=$$

$$x^2 = y^2 + 25^2 - 50\sqrt{(6y-9)},$$

en daar nu ook nog $x = 35 - y$ is, heeft men

$$(35-y)^2 = y^2 + 25^2 - 50\sqrt{(6y-9)},$$

of na ontwikkeling

$$35^2 - 70y = 25^2 - 50\sqrt{(6y-9)},$$

en

$$70y = 600 + 50\sqrt{(6y-9)},$$

$$7y - 60 = 5\sqrt{(6y-9)},$$

waaruit volgt

$$(7y-60)^2 = 25(6y-9),$$

of

$$49y^2 - 840y + 3600 - 150y + 225 = 0,$$

$$y^2 = \frac{990}{49}y + \frac{3825}{49} = 0,$$

en dus

$$y = \frac{495}{49} \pm \sqrt{\left(\frac{495^2}{49^2} - \frac{3825}{49}\right)},$$

$$= \frac{495}{49} \pm \frac{240}{49},$$

zoodat men voor y vindt

$$y = 15 \quad \text{en} \quad y = \frac{255}{49}.$$

De zijden na in geheele getallen nemende, en dus de eerste waarde van y gebruikende, is $x = 20$. Verder is $BD = y - 8 = 12$, als mede $AD^2 = 6y - 9 = 81$, of $AD = 9$. Men kan nog opmerken dat de gevondene driehoek regthoekig is, dewijl $BA^2 = 225 = AD \times AC = 9 \times 25 = 225$ is.

CCXI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt naar de vijf kleinste getallen, waarvan de drie eerste in meetkunstige, de drie middelste in eene rekenkunstige en de drie laatste wederom in eene meetkunstige rede zijn, en alwaar de twee eerste en het vierde eene harmonische reeks uitmaken?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, I. WARNSINCK, J. BASSAN, M. H. GODEFROI, J. JONKHEER, J. P. OTT *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laten de drie eerste getallen zijn x, xy en xy^2, dan is aan de eerste voorwaarde voldaan; daar nu de tweede, derde en vierde getallen eene rekenkunstige reeks vormen moeten, zoo zijn xy en xy^2 er de twee eerste termen van, zoodat de derde ge-

vonden wordt door het verschil van xy en xy^2 of $yx(y-1)$ bij xy^2 te voegen. De vierde term is dan $xy^2+yx(y-1)$; en daar nu weder de meetkunstige rede tusschen het derde en vierde getal is

$$\frac{xy^2+yx(y-1)}{xy^2} = \frac{2y-1}{y},$$

zoo is het vijfde getal

$$= 2x(2y-1)\frac{2y-1}{y} =$$

$$= x(2y-1)^2.$$

Maar nu moeten de twee eerste getallen met het vierde eene harmonische reeks vormen; en deze voorwaarde geeft nog de evenredigheid

$$x : yx(2y-1) = xy - x : yx(2y-1) - xy,$$

of $$1 : 2y^2 - y = y - 1 : 2y^2 - 2y,$$

$$= 1 : 2y,$$

waaruit volgt $$xy = 2y^2 - y,$$

en dus $$2 = 2y - 1,$$

of $$y = \tfrac{3}{2}.$$

Nu aan al de voorwaarden voldaan zijnde, hebben wij de getallen

$$x,\ \tfrac{3}{2}x,\ \tfrac{9}{4}x,\ 3x \text{ en } 4x.$$

Dewijl nu nog naar de kleinste geheele getallen gevraagd wordt, zoo moet men voor x, 4 nemen, en dan vindt men de vijf getallen

4, 6, 9, 12 en 16.

CCXII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Hoe groot is de som der eerste duizend termen van de kleinste reeks in gehele getallen die de volgende eigenschap heeft; namelijk dat de 1e, 2e en 3e term meetkunstig, de 2e, 3e en 4e rekenkunstig, de 3e, 4e en 5e meetkunstig evenredig zijn en zoo voorts, zoodat de 997e, 998e en 999e meetkunstig en de 998e, 999e en de 1000e term wederom rekenkunstig evenredig zijn?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. BADON GHIJBEN, J. JONKBLOET, J. BASSAN *en* I. WARNSINCK.

Op-

Oplossing van B. Lubbers.

Men stelle voor de twee eerste termen x en xy; dan is de derde term xy^2; de vierde vindt men door het verschil van de tweede en derde bij de derde op te tellen, en deze is dus $xy^2+xy^2-yx=xy(2y-1)$. De betrekking tusschen de derde en vierde is $\frac{xy(2y-1)}{xy^2}=\frac{2y-1}{y}$, en derhalve der vijfde term $x(2y-1)^2$. De zesde term wordt nu weder gevonden door het verschil van de 4e en 5e bij de 5e op te tellen, terwijl de 7e term gevonden wordt door de zesde term te vermenigvuldigen met het quotient van de zesde door de vijfde, en zoo vervolgens, en, daar wij voor de vijf eerste termen hebben

$$x,\ xy,\ xy^2,\ xy(2y-1),\ x(2y-1)^2,$$

zoo is de zesde

$$x(2y-1)\{2y-1-y\}+x(2y-1)^2$$
$$=x(2y-1)(3y-2),$$

de zevende

$$\frac{3y-2}{2y-1}.x(2y-1)(3y-2)=x(3y-2)^2,$$

de achtste

$$2x(3y-2)^2-x(2y-1)(3y-2),$$
$$=x(3y-2)(4y-3).$$

De oneven termen dezer reeks zijn dus

$$x,\ xy^2,\ x(2y-1)^2,\ x(3y-2)^2,\ enz.$$

en de evene termen zijn

$$xy,\ xy(2y-1),\ x(2y-1)(3y-2),\ x(3y-2)(4y-3),\ enz.$$

De wet van voortgang dezer beide reeksen is nu dadelijk zigtbaar, en blijkt dat de eerste reeks het product is van de factor x met de reeks der vierkanten van de getallen $1, 3, 2y-1, 3y-2$, *enz.* terwijl de tweede reeks het product is van den factor x met de reeks $1, y, y(2y-1), (3y-2)$ *enz.* Beide deze reeksen zijn rekenkunstiger reeksen van de tweede orde; want in de eerste reeks zijn de eerste verschillen

$$y^2-1,\ (2y^2-1)-y^2,\ (3y^2-2)-(2y-1)^2,\ enz.$$

of $(y+1)(y-1)$, $(3y-1)(y-1)$, $(5y-3)(y-1)$, *enz.*

en derhalve de reeks der tweede verschillen

$$(y-1)\{2y-2,\ 2y-2,\ enz.\}.$$

Bij de tweede reeks is de reeks der eerſte verſchillen

$$y(2y-2),\ (2y-1)(2y-2,\ (3y-2)(2y-2),\ enz.$$

en dus die der tweede verſchillen

$$2(y-1)\{y-1,\ y-1,\ enz.\}$$

Beide de reekſen kunnen dus, volgens de bekende regels, geſommeerd worden. Doch, daar men in het vraagſtuk naar de reeks in de kleinſte geheele getallen vraagt, zoo moeten wij hier $x=1$ en $y=2$ nemen, en alsdan is de reeks der onevene termen

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ enz.$$

of de ſom der vierkanten van de natuurlijke getallen. De reeks der evene termen wordt

$$2,\ 6,\ 12,\ 20,\ enz.$$

Daar er nu in de beide reekſen 500 termen zijn, zoo heeft men, volgens den bekenden regel, voor de ſom der onevene termen

$$\frac{500.501.1001}{1.\ 2.\ 3.}=41791750,$$

en daar nu de eerſte term der eerſte verſchillen van de tweede reeks is 4, en die der tweede 2, zoo heeft men voor derzelver ſom

$$500.2+\frac{500.499}{1.\ 2}4+\frac{500.499.498}{1.\ 2.\ 3}.2$$
$$=20958500,$$

zoodat de geheele ſom is 83 708 750, en de reeks

$$1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 16,\ 20,\ enz.$$

CCXIII. VRAAGSTUK.

Door L. F. Beaulieu.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn de drie lijnen uit het middelpunt van den ingeſchreven cirkel, naar de hoekpunten getrokken?

Opgelost *door* L. F. Beaulieu, J. Bassan, M. de Leon, G. Brandstedter, J. Jonkhert, J. P. Ott *en* I. Warnsinck.

Oplossing *van* L. F. Beaulieu.

Zij ABC (*Fig.* 79) de driehoek, waarin O het middelpunt van den ingeſchreven cirkel is, en alwaar dus $AO=a$, $BO=b$ en $CO=c$ gegeven is. Deze laatſte lijnen deelen de hoeken des drie-

driehoeks in gelijke deelen. De driehoeken AOB en AOC geven nu

$$\left.\begin{aligned} b\,Sin.\tfrac{1}{2}B &= a\,Sin.\tfrac{1}{2}A \\ \text{en}\quad c\,Sin.\tfrac{1}{2}C &= a\,Sin.\tfrac{1}{2}A \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1),$$

omdat nu $\tfrac{1}{2}A = 90° - \tfrac{1}{2}(B+C)$ is, zoo heeft men ook

$$Sin.\tfrac{1}{2}A = Cos.\tfrac{1}{2}(B+C) = Cos.\tfrac{1}{2}B\,Cos.\tfrac{1}{2}C - Sin.\tfrac{1}{2}B\,Sin.\tfrac{1}{2}C,$$

of $$Cos.\tfrac{1}{2}B\,Cos.\tfrac{1}{2}C = Sin.\tfrac{1}{2}A + Sin.\tfrac{1}{2}B\,Sin.\tfrac{1}{2}C,$$

waarvan het vierkant is

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}B\,Cos^2.\tfrac{1}{2}C = (Sin^2.\tfrac{1}{2}A + Sin.\tfrac{1}{2}B\,Sin.\tfrac{1}{2}C)^2,$$
$$= (1 - Sin^2.\tfrac{1}{2}B)(1 - Sin^2.\tfrac{1}{2}C),$$

en dus ook

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}A + Sin^2.\tfrac{1}{2}B\,Sin^2.\tfrac{1}{2}C + 2\,Sin.\tfrac{1}{2}A\,Sin.\tfrac{1}{2}B\,Sin.\tfrac{1}{2}C$$
$$= 1 - Sin^2.\tfrac{1}{2}C - Sin^2.\tfrac{1}{2}B + Sin^2.\tfrac{1}{2}B\,Sin^2.\tfrac{1}{2}C,$$

of wel

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}A + Sin^2.\tfrac{1}{2}B + Sin^2.\tfrac{1}{2}C + 2\,Sin.\tfrac{1}{2}A\,Sin.\tfrac{1}{2}B\,Sin.\tfrac{1}{2}C - 1 = 0.$$

Hierin uit (1) voor $Sin.\tfrac{1}{2}B$ en $Sin.\tfrac{1}{2}C$ hunne waarde stellende, komt en

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}A + \frac{a^2}{b^2}Sin^2.\tfrac{1}{2}A + \frac{a^2}{c^2}Sin^2.\tfrac{1}{2}A + 2\frac{a^2}{bc}Sin^2.\tfrac{1}{2}A - 1 = 0,$$

en dus $$Sin^2.\tfrac{1}{2}A + \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{2a^2bc}Sin^2.\tfrac{1}{2}A - \frac{bc}{2a^2} = 0.$$

Uit deze vergelijking kan men nu de waarde van $Sin.\tfrac{1}{2}A$ of van A vinden, en hierdoor is dan uit de vergelijkingen (1) tevens de waarde der hoeken B en C bekend. De zijden heeft men dan eindelijk uit de vergelijkingen

$$BC = b\,Cos.\tfrac{1}{2}B + c\,Cos.\tfrac{1}{2}C,$$
$$AC = c\,Cos.\tfrac{1}{2}C + a\,Cos.\tfrac{1}{2}A,$$
en $$AB = a\,Cos.\tfrac{1}{2}A + b\,Cos.\tfrac{1}{2}B.$$

CCXIV. VOORSTEL.

Door L. F. BRAULIEU.

Indien men noemt n het aantal zijden van eenen regelmatigen veelhoek in den cirkel beschreven, wiens straal R is, $\Sigma(p)$ de som der loodlijnen uit het middelpunt op de zijden des veelhoeks nedergelaten en $\Sigma(r)$ de som der stralen van de cirkels, beschreven in de driehoeken, waarin de veelhoek verdeeld wordt, door uit een der hoekpunten diagonalen naar de andere hoeken te trekken, dan

zal men hebben $\Sigma(p) = (n-2)R + \Sigma(r)$. Men vraagt naar het bewijs?

Opgelost door L. F. Beaulieu, J. Badon Ghyben, J. Bazan, J. Jonkhert en L. J. Ulman.

I. Oplossing van L. F. Beaulieu.

Zij ABCDEF (*Fig.* 86) een regelmatige veelhoek in den cirkel beschreven, waarin uit het punt A de diagonalen AC, AD en AE, alsmede de loodlijnen OX, OX', OX'', Op, Op' enz. op dezelve getrokken zijn; en stellen wij de straalen des cirkels in de driehoeken ABC, ACD, enz. beschreven $= r, r', enz.$, dan zullen wij hebben, ingevolge het Voorstel 192,

$$\left.\begin{array}{l} \text{in driehoek ABC, } Op + Op'' - OX = R + r, \\ \text{in driehoek ACD, } Op'' + OX - OX'' = R + r', \\ \text{in driehoek ADE, } Op''' + OX' + OX'' = R + r'', \\ \text{en in driehoek CEF, } Op'' + Op''' - OX'' = R + r''', \end{array}\right\} \ldots (A)$$

Deze vergelijkingen bij elkander geteld, geven

$$Op + Op' + Op'' \ldots Op''' = 4R + (r + r' + r'' + r''') \ldots (B)$$

en volgens de aangenomene teekens

$$\Sigma(p) = (6-2)R + \Sigma(r).$$

Voor den hier gebruikten zeshoek is het voorstel bewezen. Het is gemakkelijk in te zien, dat hetzelve ook voor eenen veelhoek van een willekeurig aantal zijden doorgaat; want het blijkt uit de beschouwing der figuur, dat vooreerst alle de loodlijnen op de zijden des veelhoeks nedergelaten, alle als positief zullen voorkomen, en ten andere, daar elke diagonaal, alwaar eene loodlijn op nedergelaten is, twee driehoeken van elkander scheidt, en wel zoodanig, dat de eene driehoek ter eene zijde, en de andere ter andere zijde ligt, dat deze loodlijn ten opzigte van eenen dezer driehoeken positief zijnde, noodzakelijk voor de andere als negatief in rekening komt; waaruit alzoo volgt, dat, als men in den gegeven veelhoek de $n-2$ driehoeken bij (A) opgegeven vormt, en de som der loodlijnen, even als in (A) bij elkander voegt, al de loodlijnen op de diagonalen nedergelaten zoo wel met het teeken + als met het teeken — zullen voorkomen, en derhalve elkander vernietigen. Er blijft dan niets over als de som der loodlijnen op de zijden des veelhoeks nedergelaten, terwijl het tweede lid der vergelijkingen (A) blijkbaar bevat de som der

de straalen van de ingeschrevene cirkels en $(n-2)$ maal den straal R van den omgeschreven cirkel.

Aanmerking. Het voorstel gaat ook door voor elken onregelmatigen veelhoek in den cirkel beschreven, dewijl niets in het voorgaande bewijs van die regelmatigheid afhangt, doch men moet bij het vormen van de som der loodlijnen, op de teekenen dezer loodlijnen moeten bedacht zijn; dewijl deze loodlijnen negatief worden, zoodra zij op den buitenkant der zijde van den veelhoek vallen. Door, bij voorbeeld, het voorstel toe te passen op den vierhoek ABCD, zoude blijkbaar de loodlijn OX' als negatief in rekening moeten gebragt worden; dit volgt ook onmiddellijk uit het voorgaande bewijs, door het optellen der twee eerste vergelijkingen (A), waaruit men vindt

$$Op+Op'+Op''-OX'=2R+r+r'.$$

Uit de beschouwing der figuur is echter blijkbaar dat nooit meer dan eene loodlijn negatief kan zijn, en dat, zoodra het middelpunt des omgeschreven cirkels *binnen* den veelhoek gelegen is, al de loodlijnen positief zijn.

Gevolg. De vergelijking $\Sigma(p)=(n-2)R+\Sigma(r)$ dan doorgaande voor elken onregelmatigen veelhoek, en de termen $\Sigma(p)$ en $(n-2)R$ niet veranderende, uit welk hoekpunt men de diagonalen ook trekke, zoo volgt hieruit, dat $\Sigma(r)$ ook standvastig blijft; en dit geeft dan de merkwaardige eigenschap: *Dat, zoo men eenen willekeurigen veelhoek in eenen cirkel beschreven, door diagonalen uit een der hoekpunten naar de overige getrokken in driehoeken verdeelt, de som der straalen van de ingeschrevene cirkels dezer driehoeken altijd dezelfde zal blijven, welk hoekpunt men ook verkieze tot het doen zamen komen der diagonalen.*

II. Oplossing van J. Badon Ghyben.

Zij $ABB'B''$ *enz.* (*Fig.* 81) een gedeelte van den regelmatigen n-hoek in den cirkel ADE beschreven; laat de zijde des veelhoek $=a$, en de halve middelpuntshoek $DOF=\alpha$ zijn, zoodat $2\alpha=\frac{360^\circ}{n}$ is. Trekt men nu verder de diagonalen AB', AB'', *enz.* waardoor $n-2$ driehoeken ABB', $AB'B''$, *enz.* ontstaan, dan kan men de hoeken in elken driehoek achtervolgens door de aanwijzers 1, 2, 3, *enz.* tot $n-2$ onderscheiden, zoodat noemen

mende *hoek* ABB′, β_1 en *hoek* BB′A, γ_1, altijd de hoeken, welke men uit A, den cirkel rondgaande, het eerst ontmoet, β en de volgende γ noemende; terwijl de hoeken BAB′, B′AB″, enz. alle gelijk α zijn.

Al de loodlijnen OF $= p$ even groot zijnde, hebben wij er slechts eene te berekenen; en daartoe hebben wij uit den regthoekigen driehoek ODF

$$OF = p = OD\ Cos.\ DOF = R\ Cos.\ \alpha,$$

en daar er n zulke loodlijnen zijn, heeft men

$$\Sigma\,(p) = n\,R\ Cos.\ \alpha.$$

Is nu IFH de cirkel in een der driehoeken door twee diagonalen en eene veelhoekszijde gevormd, beschreven, dan is de straal GH van denzelven bekend door de vergelijking

$$GH = \frac{DE\ Sin.\ \frac{1}{2}\,ADE\ Sin.\ \frac{1}{2}\,AED}{Cos.\ \frac{1}{2}\,DAE}\ \text{(Voorstel 213)},$$

Is nu de driehoek ADE de m^{de} te rekenen van ABB′ af aan, dan is *hoek* ADE $= \beta_m$, *hoek* AED $= \gamma_m$ en GH $= r_m$, zoodat de voorgaande vergelijking geeft

$$r_m = a\,\frac{Sin.\ \frac{1}{2}\,\beta_m\ Sin.\ \frac{1}{2}\,\gamma_m}{Cos.\ \frac{1}{2}\,\alpha}.$$

Maar, omdat DF $=$ OD *Sin.* DOF of $\frac{1}{2}a = R\ Sin.\ \alpha$ is, zoo gaat de vergelijking over in

$$r_m = \frac{2\,R\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \frac{1}{2}\,\beta_m\ Sin.\ \frac{1}{2}\,\gamma_m}{Cos.\ \frac{1}{2}\,\alpha}.$$

Nu is, zoo als uit de figuur blijkt,

$\beta_1 = (n-2)\,\alpha$, $\beta_2 = (n-3)\,\alpha$ . . . . $\beta_m = (n-m-1)\,\alpha$,

en $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_2 = 2\,\alpha$ . . . . . $\gamma_m = m\,\alpha$,

zoodat

$$\begin{aligned} Sin.\ \tfrac{1}{2}\,\beta_m &= Sin.\ \tfrac{1}{2}\,(n-m-1)\,\alpha, \\ &= Sin.\ (\tfrac{1}{2}\,n\,\alpha - \tfrac{1}{2}\,(m+1)\,\alpha), \\ &= Sin.\ (90^\circ - \tfrac{1}{2}\,(m+1)\,\alpha) = Cos.\ \tfrac{1}{2}\,(m+1)\,\alpha, \end{aligned}$$

alsmede $Sin.\ \frac{1}{2}\,\gamma_m = Sin.\ \frac{1}{2}\,m\,\alpha$.

Wij hebben dus

$$r_m = 2\,R\ Sin.\ \alpha\,\frac{Cos.\ \frac{1}{2}\,(m+1)\,\alpha\ Sin.\ \frac{1}{2}\,m\,\alpha}{Cos.\ \frac{1}{2}\,\alpha}.$$

Maar nu is in het algemeen

$$Cos.\ a\ Sin.\ b = \tfrac{1}{2}\ Sin.\ (a+b) - \tfrac{1}{2}\ Sin.\ (a-b),$$

en,

en, dit op den teller der voorgaande vergelijking toepasselende, komt er

$$r_m = R\,Sin.\,\alpha\,\frac{Sin.\,(m+\tfrac{1}{2})\,\alpha - Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha}{Cos.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha},$$

of $r_m = 2\,R\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\,(Sin.\,(m+\tfrac{1}{2})\,\alpha - Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha)$.

Dewijl nu deze vergelijking voor alle de driehoeken ABB', $AB'B''$, *enz.* doorgaat, zullen wij hebben

$$r_1 = 2\,R\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\{Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha - Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\},$$
$$r_2 = 2\,R\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\{Sin.\,\tfrac{3}{2}\,\alpha - Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\},$$
$$r_3 = 2\,R\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\{Sin.\,\tfrac{5}{2}\,\alpha - Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\},$$
$$\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = 2\,R\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\{Sin.\,(n-\tfrac{3}{2})\,\alpha - Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\}.$$

Al deze vergelijkingen optellende, hebben wij

$$\Sigma(r) = 2\,R\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\{Sin.\,\tfrac{3}{2}\,x + Sin.\,\tfrac{5}{2}\,\alpha\,Sin.\,\tfrac{7}{2}\,\alpha \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots Sin.\,\frac{2n-3}{2}\,\alpha - (n-2)\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\}.$$

Volgens Voorstel 171 is nu

$$Sin.3x + Sin.5x \ldots Sin.(2n-3)x = \frac{Sin^2.nx}{Sin.x} - Sin.x - Sin.(2n-1)x,$$

en dus door $x = \tfrac{1}{2}\alpha$ te nemen

$$Sin.\tfrac{3}{2}\,\alpha + Sin.\tfrac{5}{2}\,\alpha \ldots - Sin.\frac{2n-3}{2}\,\alpha = \frac{Sin^2.\,\tfrac{1}{2}\,n\alpha}{Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha} \ldots\ldots$$
$$\ldots - Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha - Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(2n-1)\,\alpha.$$

Neemt men hierbij in aanmerking dat $\tfrac{1}{2}\,n\alpha = 90°$, $\frac{2n-1}{2}\alpha = n\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha = 180° - \tfrac{1}{2}\alpha$ is, zoo is dan ook

$$Sin^2.n\alpha = 1,\ Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(2n-1)\,\alpha = Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha,$$

en dan hebben wij

$$Sin.\tfrac{3}{2}\alpha + Sin.\tfrac{5}{2}\alpha \ldots Sin.\tfrac{1}{2}(2n-3)\alpha = \frac{1}{Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha} - 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha$$
$$= \frac{1 - 2\,Sin^2.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha}{Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha} = \frac{Cos.\,\alpha}{Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha},$$

zoo dat nu is

$$\Sigma(r) = 2\,R\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\{\frac{Cos.\,\alpha}{Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha} - (n-2)\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\}.$$

Maar

$$= 2R(Cos.a - (n-2)Sin.^2\tfrac{1}{2}a),$$
$$= 2R\left\{Cos.a - \tfrac{1}{2}(n-2)(1-Cos.a)\right\},$$
$$= R\left\{2Cos.a - (n-2) + (n-2)Cos.a\right\},$$
$$= R\left\{nCos.a - (n-2)\right\}.$$

Maar wij hebben reeds gevonden

$$nR\,Cos.a = \Sigma(p),$$

dus is dan eindelijk

$$\Sigma(r) = \Sigma(p) - (n-2)R,$$

of
$$\Sigma(p) = \Sigma(r) - (n-2)R.$$

CCXV. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt den ſtraal r van den, in eene piramide beſchreven, bol, te bepalen, als gegeven zijn de ſtralen R, R^I, R^{II} *en* R''' *van de vier bollen, welke een der zijvlakken van de piramide uitwendig en de andere inwendig aanraken?*

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, L. J. ULMAN, J. JONKHEER *en* J. P. OTT.

I. OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Stellen wij de oppervlakte der vier zijvlakken van de piramide voor door A, B, C en D, welke nu reſpectivelijk door de bollen, wier ſtralen zijn R, R^I, R^{II} en R''' uitwendig worden aangeraakt; is verder r de ſtraal van den ingeſchreven bol en I de inhoud der piramide, zoo is blijkbaar

$$I = \tfrac{1}{3}r(A+B+C+D);$$

of $A+B+C+D = 2S$ ſtellende,

$$I = \tfrac{2}{3}rS.$$

Vereenigt men nu het middelpunt van een dier bollen welke uitwendig aanraakt met de vierhoekpunten der piramide, dan vormt men vier piramiden, die allen den ſtraal van den bol tot hoogte en elk een der zijvlakken der piramide tot bazis hebben; en trekt men van de ſom drie piramiden, wier grondvlakken inwendig door den bol worden aangeraakt van de piramide af, welke tot grondvlak heeft het uitwendig aangeraakt zijvlak der gegevene piramide, zoo houdt men den inhoud dezer laatſte over, en wij hebben dus

I =

$$I = \tfrac{1}{3}R(B+C+D-A)$$
$$= \tfrac{2}{3}R(S-A).$$

En op dezelfde wijze hebben wij:

$$I = \tfrac{2}{3}R'(S-B),$$
$$I = \tfrac{2}{3}R''(S-C),$$

en
$$I = \tfrac{2}{3}R'''(S-D).$$

Elk dezer vergelijkingen verbindende met de vergelijking $I = \frac{2}{3}rS$, zoo heeft men

$$\frac{r}{R} = \frac{S-A}{S},$$
$$\frac{r}{R'} = \frac{S-B}{S},$$
$$\frac{r}{R''} = \frac{S-C}{S},$$

en
$$\frac{r}{R'''} = \frac{S-D}{S},$$

waarvan de som is

$$\frac{r}{R}+\frac{r}{R'}+\frac{r}{R''}+\frac{r}{R'''} = \frac{4S-(A+B+C+D)}{S}$$
$$= \frac{2S}{S} = 2,$$

en derhalve

$$r = \frac{RR'R''R'''}{R'R''R'''+RR''RR'''+RR'R'''+RR'R''}$$

II. Oplossing van L. J. Ulman.

Zij ABCD (*Fig.* 82) de voorgeſtelde piramide met den ingeſchreven bol, dan zal men, met bijbehouding der zelfde beteekenis aan de letters der voorgaande oplosſing, hebben $I = \frac{2}{3}rS$. Nemende nu het grondvlak BCD voor datgene welks oppervlakte $= A$ is, en ſtellende de hoogte AH der piramide $= h$, dan is $I = \frac{1}{3}Ah$ of $Ah = 2rS$.

Stelt men nu verder dat de bol LM het grondvlak uitwendig en de overige zijvlakken inwendig aanraakt, en dat men na de zijvlakken verlengd te hebben, een vlak $B'C'D'$ evenwijdig aan BCD trekt, welk den bol LM aanraakt, dan zal de piramide $B'C'D'A$ gelijkvormig met de gegevene zijn, waaruit ook volgt dat:

dat de ſtralen r en R evenredig met de hoogten AH en AH' zullen zijn; dit geeft dan de evenredigheid

$$r : R = h : 2R + h,$$

of $$r : R = Ah : 2RA + Ah,$$

dat is: $$r : R = I : \tfrac{2}{3}RA + I = \tfrac{2}{3}rS : \tfrac{2}{3}RA + \tfrac{2}{3}rS,$$

waaruit volgt $$SR = rS + 2AR,$$

of $$\frac{r}{R} = \frac{S - 2A}{s}R.$$

En op dezelfde wijze heeft men

$$\frac{r}{R'} = \frac{S - 2B}{S}R,$$

$$\frac{r}{R''} = \frac{S - 2C}{S}R'',$$

en $$\frac{r}{R'''} = \frac{S - 2D}{S}R''',$$

waarvan de ſom wederom geeft

$$\frac{r}{R} + \frac{r}{R'} + \frac{r}{R''} + \frac{r}{R'''} = 2;$$

even zoo als in de eerſte oplosſing.

CCXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eenen driehoek is bekend de tophoek, benevens het verſchil tusſchen elk der opſtaande zijden en het ſtuk van de grondlijn, begrepen tusſchen den hoek aan deze zijde en het voetpunt van de lijn, die uit het midden van den tophoek, op de grondlijn nedergelaten wordt. Men vraagt dezen driehoek te berekenen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, K. C. COX, J. JONKHERT, J. SCHOTBORGH, HZN., W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC (*Fig.* 83) de driehoek, waarin de tophoek ABC $= 2\alpha$ door de lijn BD in twee gelijke deelen gedeeld wordt; men neme nu AF $=$ AD en CE $=$ CD, dan zal men de ſtukken FB $= a$ en BE $= b$ als bekend mogen aannemen; ſtellende dus AD $= x$ en DC $= y$, dan zal men uit den driehoek ABC hebben

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC\ Cos.\ ABC,$$

of

of $x+y)^2 = (a+x)^2 + (b+y)^2 - 2(a+x)(b+y)Cos.2\alpha$ . . (1).

De lijn BD den tophoek midden door deelende, zoo heeft men nog de bekende evenredigheid

$$AB : BC = AD : DC,$$

of $a+x : b+y = x : y,$

waaruit volgt $ay+xy = bx+xy,$

$$x = \frac{a}{b}y,$$

en $$a+x = \frac{ab+ay}{b} = \frac{a}{b}(b+y),$$

als mede $$x+y = \frac{b+a}{b}y.$$

Deze waarden in de vergelijking (1) geſteld, geven:

$$\frac{(b+a)^2}{b^2}y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b+y)^2 + (b+y)^2 - 2\frac{a(b+y)}{b}(b+y)Cos.2\alpha,$$

of $(b+a)^2y^2 = a^2(b+y)^2 + b^2(b+y)^2 - 2ab(b+y)^2 Cos.2\alpha,$

waaruit volgt $(b+a)y = \pm(b+y)\sqrt{\{a^2+b^2-2abCot.2\alpha\}},$

en dus $$y = \frac{\pm b\sqrt{(a^2+b^2-2ab\,Cos.2\alpha)}}{a+b\mp\sqrt{(a^2+b^2-2ab\,Cos.2\alpha)}},$$

alsmede $$x = \frac{a}{b}y = \frac{\pm a\sqrt{(a^2+b^2-2ab\,Cos.2\alpha)}}{a+b\mp\sqrt{(a^2+b^2-2ab\,Cos.2\alpha)}}.$$

Aanmerking *van* J. P. Delprat. Men kan de gevondene waarden voor x en y gemakkelijk conſtrueren, in aanmerking nemende, dat de lijn EF gelijk is aan de wortelgrootheid in deze waarden voorkomende, zoodat men ook ſchrijven kan

$$y = \pm\frac{BE\times EF}{BE+BF\mp EF},$$

en $$x = \pm\frac{BF\times EF}{BE+BF\mp EF}.$$

Indien men dus, in *Fig.* 84, eenen hoek NBM $= 2\alpha$ gemaakt heeft, welke door BP in twee gelijke deelen gedeeld wordt, en men neemt BE $= b$ en BF $= a$, dan is

$$EF = \sqrt{(a^2+b^2-2ab\,Cos.2\alpha)}.$$

Verder merke men op, dat uit de gevondene waarde van

$$x = \frac{a}{b}y$$

volgt $x : y = a : b$,

of AF : CE = BF : BE,

en dat derhalve, in *Fig.* 83, de lijn FE evenwijdig aan AC is, zoodat, makende HF = GF en trekkende GL evenwijdig aan GH, het snijpunt I met BP het punt bepalen zal waardoor CIA evenwijdig aan EF moet getrokken worden, dewijl nu blijkbaar IA = FA is.

CCXVII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men vraagt het getal 1828 *in vier deelen te verdeelen, zoodanig dat de sommen derzelve twee aan twee genomen, zes getallen in eene rekenkunstige reeks voortbrengen?*

OPGELOST *door* K. SMIT, J. BASSAN, J. SCHOTBORG Hz., R. SPRUIT, M. H. GODEFROI, B. LUBBERS, M. G. SNOER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. P. OTT, J. JONKHERT, K. C. COX, N. J. SINGELS *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Laten de vier deelen zijn u, v, x en y, dan hebben wij voor de zes getallen

$$u+v,\ u+x,\ u+y,\ v+x,\ v+y \text{ en } x+y,$$

en dan moet nog

$$(u+v)+(u+y) = 2(u+x),$$

of
$$v+y = 2x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

zijn; en even eens

$$2(y+u) = (u+x)+(v+x),$$

of
$$2y+u = 2x+v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

als mede $2(v+x) = (u+y)+(v+y)$,

of
$$v+2x = u+2y,$$

welke echter dezelfde vergelijking als de voorgaande geeft, eindelijk is nog

$$2(v+y) = (v+x)+(x+y),$$

of
$$v+y = 2x,$$

hetwelk wederom hetzelfde als de vergelijking (1) is. Wij hebben dan ter bepaling van de gezochte deelen, slechts de beide vergelijkingen (1) en (2), als mede

$$u+v+x+y = 1828 \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Trekt men de vergelijkingen (1) van (2) af, dan komt er

$y+$

$$y+u-v=v,$$

of $$y+u=2v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

en hierdoor verandert (3) in

$$v+x+2v=1828,$$

of in $$3v=1828-x,$$

en dus $$v=609\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}x,$$

$$=609-\frac{x-1}{3}.$$

Men ſtelle nu $x-1=3p$, dan is

$$v=609-p,$$

alzoo uit (1)

$$y=2x-v=6p+2-(609-p),$$

$$=7p-607.$$

Eindelijk heeft men uit (4)

$$z=2v-y=1218-2p-(7p-607)$$

$$=1825-9p.$$

Het blijkt dus hieruit dat men voor p alle geheele getallen mag nemen, mits ſlechts u, v, x en y poſitieve getallen blijven; en dit geeft dus de voorwaarde dat

$$7p>607,$$

of $$p>86\tfrac{5}{7},$$

en tevens uit de waarde van u

$$p<\tfrac{1825}{9},$$

of $$p<202\tfrac{7}{9}.$$

Er beſtaan alzoo $202-86=116$ onderſcheidene waarden die men aan p geven mag, en alzoo 116 onderſcheidene antwoorden op de vraag. Onder deze geeft $p=152$ gelijke waarden aan de vier deelen, hetwelk ſtrikt genomen een oneigenlijk antwoord is.

CCXVIII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

De vergelijking $57\tfrac{1}{2}x+55y+52\tfrac{1}{2}z+50v=1000$ *gegeven zijnde, vraagt men, hoe vele antwoorden in geheele getallen hierop beſtaan kunnen?*

OPGELOST *door* J. P. DELPRAT, J. BASSAN *en* M. L. GOEDE.

OPLOSSING *van* J. P. DELPRAT.

In de voorgeſtelde vergelijking de breuken wegmakende, zoo komt er

$$115x+110y+105z+100v=2000,$$

of $$23x+22y+21z+20v=400,$$

en daaruit volgt onmiddellijk

$$v=20-\frac{23x+22y+21z}{20},$$

$$=20-(x+y+z)-\frac{3x+2y+z}{20}.$$

Het is blijkbaar dat de laatſte term van het tweede lid een geheel getal moet zijn; zonder derhalve aan de algemeenheid van de oplosſing te kort te doen mag men ſtellen

$$\frac{3x+2y+z}{20}=p,$$

en dan kan p alle geheele poſitieve waarden, die het voorſtel toelaat, voorſtellen. Uit deze laatſte vergelijking heeft men verder

$$y=10p-x-\frac{x+z}{2}.$$

Men zal dan wederom, zonder de algemeenheid der oplosſing te benadeelen, mogen nemen

$$\frac{x+z}{2}=q.$$

Hierdoor is dan $$y=10p-x-q,$$

alsmede $$z=2q-x,$$

en $$v=20-(10p-x+q)-p,$$

$$=20-11p+x-q.$$

Door nu, in de drie laatſte vergelijkingen, aan p, q en x willekeurige waarden te geven, zal men de overeenkomſtige van y, z en v kunnen vinden; doch daar men ſlechts geheele poſitieve waarden begeert, zal men voor x ſlechts alle geheele getallen van 1 af mogen nemen; verder zal voor alle poſitieve waarden van y

$$x+q<10p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

voor alle poſitieve waarden van z

$$x<2q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

en voor alle poſitieve waarden van v

$$11p+q<20+x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

zoodat men in de keuze van x, p en q in zoo verre beperkt is, dat aan de drie laatſte ongelijkheden zal moeten voldaan worden. Door de eerſte met de laatſte op te tellen heeft men

11 p

of $y+u-v=v$,

$y+u=2v$ . . . . . (4),

en hierdoor verandert (3) in

of in $v+x+2v=1828$,

en dus $3v=1828-x$,

$v=609\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x$,

$=609-\frac{x-1}{3}$.

Men ſtelle nu $x-1=3p$, dan is

alzoo uit (1) $v=609-p$,

$y=2x-v=6p+2-(609-p)$,

$=7p-607$.

Eindelijk heeft men uit (4)

$z=2v-y=1218-2p-(7p-607)$

$=1825-9p$.

Het blijkt dus hieruit dat men voor p alle geheele getallen mag nemen, mits ſlechts u, v, x en y poſitieve getallen blijven; en dit geeft dus de voorwaarde dat

of $7p>607$,

$p>86\frac{5}{7}$,

en tevens uit de waarde van u

of $p<\frac{1825}{9}$,

$p<202\frac{7}{9}$.

Er beſtaan alzoo $202-86=116$ onderſcheidene waarden die ... geven mag, en alzoo 116 onderſcheidene antwoorden ... Onder deze geeft $p=152$ gelijke waarden aan de ... hetwelk ſtrikt genomen een oneigenlijk antwoord is.

CXVIII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

... $57\frac{1}{2}x+55y+52\frac{1}{2}z+50v=1000$ *gegeven zijn-* ... *yele antwoorden in geheele getallen hierop be-*

... DELPRAT, J. BASSAN *en* M. L. GOEDE.

... SING *van* J. P. DELPRAT.

... *rgelijking* de breuken wegmakende, zoo

dat de ſtralen r en R evenredig met de hoogten AH en AH' zullen zijn; dit geeft dan de evenredigheid

$$r : R = h : 2R + h,$$

of $$r : R = Ah : 2RA + Ah,$$

dat is: $$r : R = I : \tfrac{1}{2}RA + I = \tfrac{1}{2}rS : \tfrac{1}{2}RA + \tfrac{1}{2}rS,$$

waaruit volgt $$SR = rS + 2AR;$$

of $$\frac{r}{R} = \frac{S - 2A}{s} R;$$

En op dezelfde wijze heeft men

$$\frac{r}{R'} = \frac{S - 2B}{S} R,$$

$$\frac{r}{R''} = \frac{S - 2C}{S} R'',$$

en $$\frac{r}{R'''} = \frac{S - 2D}{S} R''',$$

waarvan de ſom wederom geeft

$$\frac{r}{R} + \frac{r}{R'} + \frac{r}{R''} + \frac{r}{R'''} = 4;$$

even zoo als in de eerſte oplosſing.

CCXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eenen driehoek is bekend de tophoek, benevens het verſchil tuſſchen elk der opſtaande zijden en het ſtuk van de grondlijn, begrepen tuſſchen den hoek aan deze zijde en het voetpunt van de lijn, die uit het midden van den tophoek, op de grondlijn nedergelaten wordt. Men vraagt dezen driehoek te berekenen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, K. C. COX, J. JONKHERT, J. SCHOTBORGH, HZN., W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC (*Fig.* 83) de driehoek, waarin de tophoek ABC $= 2a$ door de lijn BD in twee gelijke deelen gedeeld wordt; men neme nu AF $=$ AD en CE $=$ CD, dan zal men de ſtukken FB $= a$ en BE $= b$ als bekend mogen aannemen; ſtellende dus AD $= x$ en DC $= y$, dan zal men uit den driehoek ABC hebben

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC\ Cos.\ ABC,$$

of

of $x+y)^2 = (a+x)^2 + (b+y)^2 - 2(a+x)(b+y)\,Cos.\,2\alpha$ . . (1).

De lijn BD den tophoek midden door deelende, zoo heeft men nog de bekende evenredigheid

$$AB : BC = AD : DC,$$

of $a+x : b+y = x : y,$

waaruit volgt $ay + xy = bx + xy,$

$$x = \frac{a}{b}y,$$

en $$a+x = \frac{ab+ay}{b} = \frac{a}{b}(b+y),$$

als mede $$x+y = \frac{b+a}{b}y.$$

Deze waarden in de vergelijking (1) gesteld, geven:

$$\frac{(b+a)^2}{b^2}y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b+y)^2 + (b+y)^2 - 2\frac{a(b+y)}{b}(b+y)\,Cos.\,2\alpha,$$

of $(b+a)^2y^2 = a^2(b+y)^2 + b^2(b+y)^2 - 2ab(b+y)^2\,Cos.\,2\alpha,$

waaruit volgt $(b+a)y = \pm(b+y)\sqrt{\{a^2+b^2-2ab\,Cos.\,2\alpha\}},$

en dus $$y = \frac{\pm b\sqrt{(a^2+b^2-2ab\,Cos.\,2\alpha)}}{a+b\mp\sqrt{(a^2+b^2-2ab\,Cos.\,2\alpha)}},$$

alsmede $$x = \frac{a}{b}y = \frac{\pm a\sqrt{(a^2+b^2-2ab\,Cos.\,2\alpha)}}{a+b\mp\sqrt{(a^2+b^2-2ab\,Cos.\,2\alpha)}}.$$

AANMERKING *van* J. P. DELPRAT. Men kan de gevondene waarden voor x en y gemakkelijk construeren, in aanmerking nemende, dat de lijn EF gelijk is aan de wortelgrootheid in deze waarden voorkomende, zoodat men ook schrijven kan

$$y = \pm\frac{BE \times EF}{BE + BF \mp EF},$$

en $$x = \pm\frac{BF \times EF}{BE + BF \mp EF}.$$

Indien men dus, in *Fig.* 84, eenen hoek NBM $= 2\alpha$ gemaakt heeft, welke door BP in twee gelijke deelen gedeeld wordt, en men neemt BE $= b$ en BF $= a$, dan is

$$EF = \sqrt{(a^2+b^2-2ab\,Cos.\,2\alpha)}.$$

Verder merke men op, dat uit de gevondene waarde van

$$x = \frac{a}{b}y$$

zijnde, zoo ſtellen wij voor de gevraagde getallen

$\frac{1}{4}\{3(x+y)^2-(x+y)\}$ en $\frac{1}{4}\{3(x-y)^2-(x-y)\}$,

waarvan de ſom is $\frac{3}{4}(x^2+y^2)-x$ . . . . . (1),

en het verſchil $6xy-y$ . . . . . (2).

Deze beide laatſte uitkomſten moeten nu weder vijfhoekige getallen zijn; daartoe ſtellen wij

$$6xy-y=\frac{3p^2-p}{2},$$

en nemende hierin $y=p$, dan heeft men

$$6x=1=\frac{3p-1}{2},$$

of $$x=\frac{3p+1}{12}.$$

Hierdoor wordt nu

$$\frac{3}{4}(x^2+y^2)-x=3\left(\left(\frac{3p+1}{12}\right)^2+p^2\right)-\frac{3p+1}{12},$$

$$=\frac{9p^2+6p+1}{48}+3p^2-\frac{3p+1}{12},$$

$$=\frac{153p^2-6p-3}{48}=\frac{51p^2-2p-1}{16}.$$

Deze uitdrukking een vijfhoekig getal moetende zijn, zoo ſtellen wij

$$\frac{51p^2-2p-1}{16}=\frac{3q^2-q}{2},$$

en dus $$51p^2-2p-1=24q^2-8q,$$

waaruit volgt

$$51^2p^2-2.51p+1=24.51.q^2-51.8q+52,$$

of $$51p-1=\sqrt{(24.51q^2-51.8q+52)}.$$

Ten einde deze uitdrukking rationaal te maken, ſtellen wij $q=r-\frac{1}{3}$, dan wordt

$$51p=1+\sqrt{(1224r^2-1224r+324)},$$

$$=1+6\sqrt{(34r^2-34r+9)},$$

en hierin nu wederom

$$(rs-3)^2=34r^2-34r+9$$

nemende, komt er

$$r^2s^2-6rs=34r^2-34r,$$

of $$rs^2-6s=34r-34,$$

en

en derhalve $r = \frac{34 - 6s}{34 - s^2}$,

waarin voor s nu eene willekeurige waarde genomen mag worden. Voor $s = 6$ is $r = 1$, en alzoo $p = y = \frac{19}{11}$; $q = \frac{2}{5}$ en $x = \frac{3}{17}$. De vijfhoekige getallen zijn alzoo $\frac{154}{867}$ en $\frac{45}{289}$, derzelver wortels zijn $\frac{28}{11}$ en $-\frac{19}{11}$. De som en het verschil der vijfhoekige getallen is dan $\frac{1}{3}$ en $\frac{19}{867}$, hebbende $\frac{3}{5}$ en $\frac{19}{11}$ tot wortel.

CCXX. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men vraagt drie rationale vijfhoekige getallen te vinden, welke volgens eene arithmetische reeks opklimmen, zoodanig dat de som hunner wortels ook een rationaal vijfhoekig getal zij?

OPGELOST *door* K. SMIT, J. BASSAN *en* B. LUBBERS.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

De algemeene formule $\frac{1}{2}(3x^2 - x)$ voor de vijfhoekige getallen toont, dat 24 maal een vijfhoekig getal plus één juist een vierkant, namelijk $(6x - 1)^2$ oplevert; men kan derhalve voor de gevraagde vijfhoekige getallen nemen

$$\frac{x^2 - 1}{24}, \quad \frac{y^2 - 1}{24} \text{ en } \frac{z^2 - 1}{24},$$

alsdan zullen de wortels zijn

$$\frac{x+1}{6}, \quad \frac{y+1}{6} \text{ en } \frac{z+1}{6},$$

omdat

$$\tfrac{1}{2}\left\{3\left(\frac{x+1}{6}\right)^2 - \frac{x+1}{6}\right\} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{3x^2 + 6x + 3 - 6x - 6}{36},$$

$$= \frac{x^2 - 1}{24}$$

is, en zoo ook met de overige wortels. De vijfhoekige getallen eene rekenkunstige reeks moetende vormen, zoo moet de som der beide uiterste gelijk aan het dubbel van den middelsten term zijn, en alzoo

$$\frac{x^2 - 1}{24} + \frac{z^2 - 1}{24} = \frac{y^2 - 1}{12},$$

of $$x^2 + z^2 - 2 = 2y^2 - 2,$$

en dus $$y^2 = \frac{x^2 + z^2}{2}.$$

Stellen wij nu hier $x = pz$, dan wordt

$$y^2 = z^2\frac{p^2+1}{2}.$$

Om $\frac{p^2+1}{2}$ tot een vierkant te maken nemen wij $p = 2q+1$,

alsdan is $\frac{p^2+1}{2} = 2q^2+2q+1$,

als mede $2q^2+2q+1 = (rq-1)^2$,

waaruit volgt $2q+2 = r^2q-2r$,

en derhalve $q = \frac{2r+2}{r^2-2}$,

alzoo $p = 2q+1 = \frac{r^2+4r+2}{r^2-2}$,

$$x = \frac{r^2+4r+2}{r^2-2}z,$$

en $y = z(rq-1) = z\frac{r^2+2r+2}{r^2-2}$.

Indien men nu $z = r^2-2$ neemt, dan wordt

$$x = r^2+4r+2,$$

en $$y = r^2+2r+2,$$

en alzoo de wortels der vijfhoekige getallen, of

$$\frac{x+1}{6} = \frac{r^2+4r+3}{6},$$

$$\frac{y+1}{6} = \frac{r^2+2r+3}{6},$$

en $$\frac{z+1}{6} = \frac{r^2-1}{6}.$$

De ſom dezer wortels is

$$\frac{3r^2+6r+5}{6}.$$

Deze waarde 24 maal genomen en er de eenheid bij geteld moet nu een vierkant opleveren, alzoo moet

$$12r^2+24r+21 = u^2$$

zijn; daartoe ſtellen wij

$$r = t+\tfrac{1}{2},$$

dan heeft men

$$12t^2+36t+36 = u^2;$$

en

en nemende nu $y = bt - 6$,
zoo zal men vinden

$$12t + 36 = b^2 t - 12b,$$

of $$t = \frac{36 + 12b}{b^2 - 12}.$$

Waarin nu b naar welgevallen, doch niet kleiner dan $\sqrt{12}$, mag genomen worden.

Voor $b = 6$ heeft men $t = \frac{8}{3}$, $r = 5$, $x = 47$, $y = 37$ en $z = 23$, en de vijfhoekige getallen zijn alzoo 92, 57 en 22, waarvan de wortels zijn 8, $\frac{19}{3}$ en 4, welker som geeft $\frac{43}{3}$, hetwelk een vijfhoekig getal is, waarvan de wortel $\frac{19}{3}$ bedraagt.

CCXXI. VRAAGSTUK.

Door J. JONKHERT.

Men vraagt de waarde te bepalen van x, y en z uit de vergelijkingen

$$12x^4 - 5x^3yz + 13x^2y^2z^2 - 28xy^3z^3 + 12y^4z^4 = 0,$$
$$6x^4z^4 - 3x^3yz^3 + 42x^2y^2z^3 - 11xy^3z + 6y^4 = 0,$$
en $$4x^4y^4 - 17x^3y^3z + x^2y^2z^2 + 2xyz^3 + 120z^4 = 0?$$

OPGELOST *door* J. JONKHERT, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Wij beginnen met in de vergelijkingen de termen te schikken volgens de opklimmende magten van x, y en z, en dan worden zij

$$\left.\begin{array}{l} 12y^4z^4 - 28y^3z^3x + 13y^2z^2x^2 - 5yzx^3 + 12x^4 = 0, \\ 6x^4z^4 - 3x^3z^3y + 42x^2z^2y^2 - 11xzy^3 + 6y^4 = 0, \\ \text{en } 4x^4y^4 - 17x^3y^3z + x^2y^2z^2 + 2xyz^3 + 120z^4 = 0. \end{array}\right\} \quad (A)$$

Gelijk bekend is, zal men door elk der termen eener geordende vergelijking met de achtervolgende termen eener meetkunstige reeks te vermenigvuldigen, de wortels der vergelijking zoo veel vergrooten als de rede der reeks aanwijst; vermenigvuldigende dan de termen der vergelijkingen met de reeksen

$$\frac{x^4}{12}, x^2, 12, \frac{144}{x^2} \text{ en } \frac{1728}{x^4},$$

$$\frac{y^4}{6}, y^2, 6, \frac{36}{y^2} \text{ en } \frac{216}{y^4},$$

en

en $\frac{z^4}{4}$, z^2, 4, $\frac{16}{z^2}$ en $\frac{64}{z^4}$,

waarvan de reden zijn $\frac{12}{x^2}$, $\frac{6}{y^2}$ en $\frac{4}{z^2}$, dan worden de voorgeſtelde vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} x^4y^4z^4 - 28x^3y^3z^3 + 156x^2y^2z^2 - 720xyz + 20736 = 0, \\ x^4y^4z^4 - 31x^3y^3z^3 + 252x^2y^2z^2 - 396xyz + 1296 = 0, \\ \text{en } x^4y^4z^4 - 17x^3y^3z^3 + 4x^2y^2z^2 + 32xyz + 7680 = 0 \end{array}\right\} \quad (B)$$

De eerſte vergelijking heeft tot beſtaanbare wortels $xyz = 16$ en $xyz = 18$, de beide overige zijn onbeſtaanbaar, want deelende de eerſte vergelijking door $(xyz - 16)(xyz - 18)$, dan is het quotient $t^2 + 6t + 72$. De tweede vergelijking heeft tot wortels $xyz = 18$ en $xyz = 12$, de beide overige zijn onbeſtaanbaar. Van de derde vergelijking eindelijk zijn dan de wortels $xyz = 12$, de tweede beſtaanbare wortel is tusſchen 12 en 16 gelegen, doch indien men zich ſlechts bij de geheele waarden bepaalt, dan zullen wij dezen tweeden wortel niet in aanmerking behoeven te nemen.

De eerſte vergelijking (B) dan vooreerst voldaan wordende door $xyz = 16$, zoo wordt de eerſte vergelijking (A) voldaan door

$$xyz = 16 . \frac{x^2}{12},$$

of $$3yz = 4x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

De tweede vergelijking (A) door

$$xyz = 18 . \frac{y^2}{6},$$

of door $$xz = 3y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

en de derde door $$xyz = 12 . \frac{z^2}{4},$$

of door $$xy = 3z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

De waarde van $3y$ uit (2) in (1) geſteld geeft

$$xz^2 = 4x,$$

$$z^2 = 4,$$

of $$z = \pm 2,$$

en dus uit (1) $$3y = 2x,$$

en uit (3) $$xy = 6,$$

of

of $y = 2$,

en $x = 3$.

Neemt men daarentegen den tweeden wortel van de eerſte der vergelijkingen (B) dan heeft men

$$xyz = 18 \cdot \frac{x^6}{12},$$

of $2yz = 3x$ . . . . . (4),

en verder $xz = 3y$ . . . . . (5),

$xy = 3z$ . . . . . (6).

de waarde van y uit (5) in (4) geeft

$2z^2 = 9$,

of $z = \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$;

verder vindt men $y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$,

en $x = 3$.

Gebruikt men eindelijk voor de twee eerſte vergelijkingen (B) de wortels $xyz = 16$ en $xyz = 12$, dan vindt men het ſtelſel van vergelijkingen

$3zy = 4x$,

$xz = 2y$,

$xy = 3z$,

en daaruit $z = \pm \frac{2}{3}\sqrt{6}$,

$y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

en $x = \pm \sqrt{6}$.

Indien men de benaderde wortel uit de derde vergelijking (B) gebruikt had, dan zoude men nog drie andere ſtelſels van vergelijkingen gevonden hebben, waaruit even zoo vele andere waarden voor x, y en z af te leiden geweest waren.

CCXXII. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

In elken driehoek zijn de ſtralen der drie cirkels, welke elke zijde en de verlengden der twee overigen raken, te zamen zoo groot a's de ſom van viermaal den ſtraal des omgeſchreven cirkels en eenmaal des ingeſchreveneh. Men vraagt naar het bewijs?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, J. WARNSINCK, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. P. OTT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Zij ABC (*Fig.* 85) een driehoek, alwaar de cirkel EFG de drie

drie zijden uitwendig aanraakt, ſtellen wij verder $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, de ſtraal van den ingeſchreven cirkel r, die van den uitwendig aanrakenden $EFG=r'$, die voor de zijde $AC=r''$ en van $AB=r'''$, trekt men dan de lijnen AD, DB en DC, alsmede de loodlijnen DE, DF en DG, dan heeft men

$$\textit{drieh.}\,ABC=\textit{drieh.}\,ADC+\textit{drieh.}\,ABD-\textit{drieh.}\,BCD,$$

of daar $\textit{drieh.}\,ADC=\frac{1}{2}br'$,

$\textit{drieh.}\,ABD=\frac{1}{2}cr'$,

en $\textit{drieh.}\,BCD=\frac{1}{2}ar'$

is, zoo is $\textit{drieh.}\,ABC=\frac{1}{2}r'(b+c-a)$,

of ſtellende $\textit{drieh.}\,ABC=I$,

$$r'=\frac{2I}{b+c-a},$$

en nemende $a+b+c=2s$,

$$r'=\frac{I}{s-a},$$

op dezelfde wijze vindt men

$$r''=\frac{I}{s-b},$$

en $$r'''=\frac{I}{s-c}.$$

Maar nu is ook

$$I=\sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}},$$

en derhalve

$$r'+r''+r'''=\frac{I}{s-a}+\frac{I}{s-b}+\frac{I}{s-c},$$

$$\text{of } r'+r''+r'''=\frac{(s-b)(s-c)+(s-a)(s-c)+(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}I,$$

$$=s\frac{(s-b)(s-c)+(s-a)(s-c)+(s-a)(s-b)}{I},$$

$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{I}+\frac{a(s-b)(s-c)+s(s-a)(s-c)+s(s-a)(s-b)}{I},$$

$$=\frac{I}{s}+\frac{a(s-b)(s-c)+s(s-a)(s-c+s-b)}{I},$$

$$=\frac{I}{s}+\frac{as(s-a)+a(s-b)(s-c)}{I},$$

=

$$= \frac{I}{s} + \frac{s}{I}\{2s^2 - sa - sb - sc + bc\},$$

$$= \frac{I}{s} + \frac{a}{I}\{2s^2 - s(a+b+c) + bc\},$$

$$= \frac{I}{s} + \frac{abc}{I}.$$

Volgens bekende formulen is de ſtraal van den ingeſchreven cirkel

$$r = \frac{I}{s},$$

en van den omgeſchreven cirkel

$$R = \frac{4abt}{I},$$

alzoo is dus $r' + r'' + r''' = r + 4R.$

Men kan nog opmerken dat bij regthoekige driehoeken $ab = aI$ zijnde, men heeft

$$r''' = \frac{I}{s-c},$$

$$= \frac{ab}{a+b-c},$$

$$= \frac{ab}{a+b-\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

teller en noemer met $(a+b)+\sqrt{(a^2+b^2)} = a+b+c$ vermenigvuldigende, zoo komt er

$$r''' = \frac{ab(a+b+c)}{2ab},$$

$$= \tfrac{1}{2}(a+b+c) = s,$$

of wel: in eenen regthoekigen driehoek is de ſtraal van den cirkel, welke de ſchuine zijde uitwendig en de verlengde der beide andere zijden aanraakt, gelijk aan de halve ſom der zijden.

CCXXIII. VOORSTEL.

Door M. DE LEON.

Men vraagt de waarde van y te vinden uit de vergelijking $Sin.2(a+\phi) + Tang.(a+2\phi) = Sin.2\phi$?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, K. C. COX, M. DE LEON, J. P. OTT, J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Omdat in het algemeen

Sin.

$$Sin.p - Sin.q = 2\,Cos.\tfrac{1}{2}(p+q)\,Sin.\tfrac{1}{2}(p-q)$$

is, en dat men de opgegevene vergelijking ſchrijven kan onder den vorm

$$Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\varphi) - Sin.2\varphi = -Tang.(\alpha+2\varphi),$$

verandert dezelve in

$$2\,Cos.(\alpha+2\varphi)\,Sin.\alpha = -Tang.(\alpha+2\varphi),$$

$$= -\frac{Sin.(\alpha+2\varphi)}{Cos.(\alpha+2\varphi)},$$

of in $2\,Cos^2.(\alpha+2\varphi)\,Sin.\alpha + Sin.(\alpha+2\varphi) = 0.$

Voor $Cos^2.(\alpha+2\varphi)$ ſchrijvende $1 - Sin^2.(\alpha+2\varphi)$, komt er

$$2\,Sin.\alpha - 2\,Sin.\alpha\,Sin^2.(\alpha+2\varphi) + Sin.(\alpha+2\varphi) = 0,$$

of wel $$Sin^2.(\alpha+2\varphi) - \frac{Sin.(\alpha+2\varphi)}{2\,Sin.\alpha} = 1,$$

en dus $$Sin.(\alpha+2\varphi) = \frac{1}{4\,Sin.\alpha} \pm \sqrt{(1+\frac{1}{16\,Sin^2.\alpha})},$$

$$= \frac{1}{4\,Sin.\alpha}\{1 \pm \sqrt{(16\,Sin^2.\alpha+1)}\}.$$

De $Sin.(\alpha+2\varphi)$ bekend zijnde is φ gevonden, en het voorſtel alzoo opgelost; men kan echter aan de gevondene uitkomst eene gedaante geven, waardoor dezelve gemakkelijker te berekenen is; men ſtelle daartoe

$$4\,Sin.\alpha = Tang.\theta,$$

dan heeft men $Sin.(\alpha+2\varphi) = Cot.\theta\{1 \pm Sec.\theta\}$.

Gebruikende nu het bovenſte teeken, zoo heeft men

$$Sin.(\alpha+2\varphi) = Cot.\theta\,(1+Sec.\theta) = \frac{Cos.\theta}{Sin.\theta} + \frac{1}{Sin.\theta},$$

$$= Cot.\tfrac{1}{2}\theta,$$

en voor het benedenſte teeken vindt men

$$Sin.(\alpha+2\varphi) = Cot.\theta\,(1-Sec.\theta),$$

$$= \frac{Cos.\theta}{Sin.\theta} - \frac{1}{Sin.\theta},$$

$$= -Tang.\tfrac{1}{2}\theta.$$

CCXXIV. VOORSTEL.

Door G. GRAAFLAND.

Twee reizigers A *en* B *vertrekken op hetzelfde oogenblik van twee plaatſen a en b elkander te gemoet; bij de ontmoeting blijkt het, dat*

dat A 30 *mijlen meer heeft afgelegd dan* B; *en dat, zoo zij met dezelfde ſnelheid waren voortgegaan,* A *in* b *gekomen zou zijn in* 4 *dagen, en* B *in* a *in* 9 *dagen; men vraagt den afſtand van* a *naar* b *te vinden?*

OPGELOST *door* G. GRAAFLAND, K. C. COX, B. LUBBERS, J. SCHOTBORGH, Hzn; J. JONKHERT, M. H. GODEFROI, J. MESCHERT VAN VOLLENHOVEN, J. J. GASTMAN, F. VAN HEUKELOM, M. DE LEON, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER, M. SALOMO, G. BRANDSTEDER, N. J. SINGELS, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. P. OTT, M. L. GOEDE *en* R. SPRUIT.

OPLOSSING *van* G. GRAAFLAND.

Laat de afſtand van *a* tot *b* zijn x mijlen, dan is de doorgeloopene ruimte van A $\frac{1}{2}x+15$, en die van B $\frac{1}{2}x-15$. De ſnelheid waarmede A reisde is bijkbaar die van $\frac{x}{4}$ en die van B $\frac{x}{9}$; de tijd door A beſteed is dus

$$\frac{\frac{1}{2}x+15}{\frac{x}{4}} = \frac{2x+60}{x},$$

en om dezelfde rede heeft B beſteed

$$\frac{\frac{1}{2}x-15}{\frac{x}{9}} = \frac{9x-270}{2x},$$

en daar zij beiden even lang onder weg geweest zijn, hebben wij de vergelijking

$$\frac{2x+60}{x} = \frac{9x-270}{2x},$$

of $5x = 390$,

en dus $x = 78$.

De afſtand der beide plaatſen was dus 78 mijlen; de ſnelheid van A 19½ mijl 's daags, en die van B 8⅔ mijl.

CCXXV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt eenen driehoek te bepalen, als gegeven is een der hoeken, benevens de inhouden der twee regthoekige driehoeken, welke tot regthoekszijden hebben de twee zijden om den gegeven hoek,

en de loodlijnen op deze zijden aan de onbekende hoeken opgerigt, gerekend tot hun onderling snijpunt.

Opgelost *door* J. Bassan, M. de Leon, W. J. C. Rammelman Elsevier, K. C. Cox *en* J. Jonkhert.

Oplossing *van* J. Bassan.

Laat ABC (*Fig.* 86) de begeerde driehoek zijn, waarin de hoek BAC $= \alpha$ bekend is, alsmede het halve product a^2 van de zijde AB met de loodlijn BD, en het halve product b^2 van AC met de loodlijn CD; trekkende dan de lijn AD, stellende dezelve $= x$ en hoek BAD $= \phi$, zoo heeft men uit den regthoekigen driehoek ABD

$$AB = AD\ Cos.\ BAD = x\ Cos.\ \phi,$$

en $$BD = AD\ Sin.\ BAD = x\ Sin.\ \phi,$$

het halve product dezer lijnen geeft dus

$$\tfrac{1}{2}\,AB \times BD = a^2 = \tfrac{1}{2}x^2\ Cos.\ \phi\ Sin.\ \phi \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Op dezelfde wijze heeft men uit den regthoekigen driehoek ACD

$$AC = AD\ Cos.\ DAC = x\ Cos.\ (\alpha - \phi),$$

en $$DC = AD\ Cos.\ DAC = x\ Sin.\ (\alpha - \phi),$$

het halve product dezer lijnen is dus wederom

$$\tfrac{1}{2}\,AC \times DC = b^2 = x^2\ Sin.\ (\alpha - \phi)\ Cos.\ (\alpha - \phi) \quad . \quad (2).$$

Het quotient der vergelijkingen (1) en (2) geeft

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{Cos.\ \phi\ Sin.\ \phi}{Sin.\ (\alpha - \phi)\ Cos.\ (\alpha - \phi)},$$

$$= \frac{Sin.\ 2\phi}{Sin.\ 2\,(\alpha - \phi)};$$

waaruit volgt $$\frac{a^2}{b^2}\ Sin.\ 2\,(\alpha - \phi) = Sin.\ 2\phi,$$

of $$\frac{a^2}{b^2}\,(Sin.\ 2\alpha\ Cos.\ 2\phi - Cos.\ 2\alpha\ Sin.\ 2\phi) = Sin.\ 2\phi;$$

door $Sin.\ 2\phi$ deelende

$$\frac{a^2}{b^2}\,(Sin.\ 2\alpha\ Cot.\ 2\phi - Cos.\ 2\alpha) = 1,$$

en dus $$Cot.\ 2\phi = \frac{b^2 + a^2\ Cos.\ 2\alpha}{a^2\ Sin.\ 2\alpha},$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\ Cosec.\ 2\alpha + Cot.\ 2\alpha;$$

waardoor het voorstel opgelost is. De waarde van x is nu uit

uit de vergelijking (1) of (2) bekend, en daardoor ook onmiddellijk die der zijden AB en AC; zoodat dan ook eindelijk de derde zijde bekend wordt.

CCXXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eenen ſcherphoekigen driehoek is een der hoeken, benevens de ſom der beide zijden, welke dien hoek inſluiten, bekend; zoo nu op het einde dezer zijden aan de andere hoeken loodlijnen worden opgerigt die elkander ſnijden, en het verſchil dezer loodlijnen insgelijks bekend is, vraagt men dien driehoek te berekenen?

OPGELOST *door* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Zij wederom ABC (*Fig.* 86) de begeerde driehoek, waarin dus *hoek* BAC $= a$ bekend is, alsmede de ſom van AB en AC $= a$, en het verſchil der loodlijnen BD en DC $= b$; trekkende nu wederom even als in het voorgaande voorſtel de lijn AD $= x$, dan zal men uit den regthoekigen driehoek BAD hebben, door *hoek* BAD $= \varphi$ te nemen

$$AB = AD\,Cos.\,BAD = x\,Cos.\,\varphi,$$

en uit DAC

$$AC = AD\,Cos.\,DAC = x\,Cos.\,(a - \varphi),$$

waarvan de ſom is

$$AB + AC = a = x\,(Cos.\,\varphi + Cos.\,(a - \varphi))$$
$$= 2\,x\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\,a\,Cos.\,(\varphi - \tfrac{1}{2}\,a) \quad . \quad . \quad (1).$$

Even eens heeft men uit deze zelfde driehoeken

$$BD = AD\,Sin.\,BAD = x\,Sin.\,\varphi,$$

en $$DC = AD\,Sin.\,CAD = x\,Sin.\,(a - \varphi),$$

waarvan het verſchil is,

$$BD - DC = b = x\,(Sin.\,\varphi - Sin.\,(a - \varphi))$$
$$= 2\,x\,Sin.\,(\varphi - \tfrac{1}{2}\,a)\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\,a \quad . \quad . \quad (2).$$

Het quotient der vergelijkingen (1) en (2) is nu

$$\frac{a}{b} = Cot.\,(\varphi - \tfrac{1}{2}\,a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

De waarde van $\varphi - \tfrac{1}{2}\,a$, en dus van φ bekend zijnde, is uit (1) of (2) ook x bekend, en alzoo ook de zijden des driehoeks. Men heeft namelijk uit (3)

$$1+Cot^2.(\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha)=\frac{1}{Sin^2.(\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha)}=1+\frac{a^2}{b^2},$$

of $$Sin.(\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha)=\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b},$$

en dus uit (2)

$$x=\frac{\sqrt{(b^2+a^2)}}{2\,Cos.\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Deze uitkomst geeft de volgende

CONSTRUCTIE. Op eene lijn $AB=a$ (*Fig.* 87) rigte men de loodlijn $BC=b$ en trekke AC; alsdan is *Tang.* $CAB=\frac{b}{a}$, en alzoo *hoek* $CAB=\varphi-\frac{1}{2}\alpha$; men neme nu *hoek* $CAE=\frac{1}{2}\alpha$, dan is *hoek* $EAB=\varphi$, op AC rigte men de loodlijn CE, tot dat zij AE ontmoet, dan is wederom $AE=AC\,Sec.\frac{1}{2}\alpha=\frac{\sqrt{(b^2+a^2)}}{Cos\,\frac{1}{2}\alpha}$, en alzoo AE in D midden door deelende is $AD=x$; eindelijk make men *hoek* $C'AB=\alpha$ en trekke uit D de loodlijnen DC' en DB', dan zal de driehoek AB'C' de begeerde zijn.

AANMERKING. Men kan nog opmerken dat uit (2) voor de som s der loodlijnen komt

$$BD+CD=x(Sin\,\varphi+Sin.(\alpha-\varphi)),$$

of $$s=2\,x\,Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\,Cos.(\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha),$$

hetwelk gedeeld in (1) geeft

$$\frac{a}{s}=Cot.\tfrac{1}{2}\alpha,$$

of $$s=a\,Tang.\tfrac{1}{2}\alpha,$$

en dat alzoo, wanneer de som der zijden AB en AC gegeven is, te gelijk de som der loodlijnen DC en DB bekend is.

CCXXVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Een cirkel en één punt buiten denzelven gegeven zijnde, vraagt men door dit punt eene lijn te trekken, zoodanig, dat dezelve door den cirkel in twee stukken van gegevene rede verdeeld worde?

OPGELOST *door* E. OLIVIER, Dz., J. BASSAN, M. DE LEON, J. SCHOTBORGH, Hzn., W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. JONKHERT.

Op-

Oplossing *van* E. Olivier, Dz.

Laat P (*Fig.* 88) het gegevene punt, QRF de gegevene cirkel zijn, en dat naar de lijn PR gevraagd worde, alwaar

$$PQ : PR = m : n$$

zij. Men stelle dan dat deze lijn gevonden zij en dat de raaklijn PT getrokken is, alsdan heeft men de bekende evenredigheid

$$PQ : PT = PT : PR,$$

en trekkende de lijnen TQ, TR en QS evenwijdig aan TR, zoo zijn de driehoeken SQT, PTR en PQS gelijkvormig, omdat *hoek* PTQ = *hoek* PRT is, dewijl zij beiden door den halven boog TQ gemeten worden; hierdoor heeft men dan ook de evenredigheid

$$TP : PQ = PQ : PS,$$

Hieruit volgt alzoo dat PQ midden evenredig is tusschen TP en PS, en daar

$$PT : PS = RP : PQ = n : m$$

is, zoo is het punt S en alzoo de lijn PQ gevonden, waardoor men aanleiding vindt tot de volgende

Constructie. Trek uit het gegeven punt de raaklijn PT, verdeel deze raaklijn in S in de gegevene rede van $m:n$, construeer eene middenevenredige tot PS en ST, en beschrijf met dezelve uit P, als middelpunt, eenen cirkelboog QQ', snijdende den cirkel in twee punten Q en Q', dan zullen de lijnen PR en PR' aan de vraag voldoen.

CCXXVIII. VOORSTEL.

Door M. H. Godefroi.

Wanneer men het getal 524433 *door een zeker getal deelt, dan gaat de deeling juist op; maar dit zelfde getal door een getal dat twee meer is deelende, is het quotiens* 9 *minder dan in het eerste geval; en er blijft bij de deeling* 293 *over. Men vraagt door welk getal eerst is gedeeld geworden?* (*)

Opgelost *door* M. H. Godefroi, M. G. Snoer, M. Salomo, M. L. Goede, J. Bassan, J. P. Ott, R. Spruit, N. J. Singels, F. van Heukelom, D. Hoola van Nooten, J. Jonehert, E. Olivier, Dz., J. Schotborgh, Hzn., M. de Leon, W.

(*) J. de Gelder, *Beginselen der Stelkunst*, bl. 257. No. 98.

W. J. C. Rammelman Elsevier, K. C. Cox, J. Messchert van Vollenhoven, B. Lubbers en G. Brandsteder.

Oplossing van M. H. Godefroi.

Stel den eersten deeler $= x$, dan is de tweede deeler $x+2$, en dus het tweede quotient 9 minder dan het eerste is, hebben wij de vergelijking

$$\frac{524433}{x+2} = \frac{524433}{x} - 9 + \frac{293}{x+2} \quad \ldots \quad (1),$$

vermenigvuldigende met $x(x+2)$, dan komt er

$$524433x = 524433(x+2) - 9(x+2)x + 293x,$$

of $$9x^2 + 275x = 1048866;$$

waaruit men vindt

$$x = 357,$$

en $$x = -326\tfrac{4}{9}.$$

Het eerste antwoord voldoet volkomen aan de vraag; doch het tweede slechts aan de vergelijking (1), en komt dus hier niet in aanmerking.

CCXXIX. Voorstel.

Door G. Brandsteder.

In eenen regthoekigen driehoek is de kortste zijde $= 12$, en de loodlijn uit den regten hoek deelt de hypotenusa in uiterste en middelste rede, men vraagt de overige zijden van dien driehoek te berekenen?

Opgelost *door* G. Brandsteder, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. de Leon, F. van Heukelom, J. Jonkhert, J. Bassan, D. Hoola van Nooten, E. Olivier, Dz., M. H. Godefroi, R. Spruit, B. Lubbers, J. Schotborgh, Hzn., J. P. Ott, M. L. Gorlée en M. G. Snoer.

Oplossing van G. Brandsteder.

Indien het grootste stuk der hypotenusa $= x$ is, dan heeft men voor het andere deel $12 - x$, en dus de evenredigheid

$$12 : x = x : x - 12,$$

en derhalve $$x^2 = 12(12 - x),$$

of $$x^2 + 12x = 144,$$

waaruit $$x = +6 \pm \sqrt{180} = 6(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Dewijl nu elke regthoekzijde midden evenredig is tusschen de hypotenusa en het aangrenzende segment, zoo heeft men voor het vier-

vierkant dezer zijde $12(12-x)$ of x^2, zoodat de waarde van x tevens die van eene der regthoekzijde is, men heeft dus voor dezelve

$$V\{12(-6\pm 6V5)\},$$
$$=6V\{2(-1\pm V5)\},$$

De andere regthoekzijde is blijkbaar om dezelfde rede

$$V(12-x)=6V\{2(1\pm V5)\}.$$

CCXXX. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Iemand de diepte eener rivier willende bepalen, deed dit op de volgende wijze: hij plaatste twee lange en dunne sparren 20 ellen van elkander dwars over de rivier en loodregt op derzelver horizontalen bodem, zoodat de eene 12 el en de andere 6 ellen boven den waterspiegel uitkwam. Deze twee sparren nu naar elkander toebuigende, zonder dezelve te krommen, bevond hij dat het raakpunt der sparren 3,924 el boven den waterspiegel uitkwam; men vraagt hieruit de waterdiepte te bepalen?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, M. L. GORDE, J. JONKHERT, J. P. OTT, J. SCHOTBORGH, Hz., J. BASSAN, M. DE LEON *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Laten AC en BD (*Fig.* 89) de loodregte stand der sparren voorstellen en GH de waterspiegel, alsdan is $AB=20$ ellen, $DH=6$ en $GC=12$ ellen; zij nu verder AE en EB de schuine stand der sparren, dan zal men de loodlijn EF te berekenen en daarvan de lijn $EI=3{,}924$ af te trekken hebben, om de diepte IF te vinden. Men stelle dan deze diepte $=x$, dan is $BE=BD=x+6$ en $AE=AC=x+12$, alsmede $EF=IF+IE=x+3{,}924$, zoodat $FB=y$ nemende, men heeft

$$EB^2=EF^2+FB^2,$$

of $$(x+6)^2=(x+3{,}924)^2+y^2 \quad \ldots \quad (1),$$

als ook $$AE^2=EF^2+AF^2,$$

of $$(x+12)^2=(x+3{,}924)^2+(20-y)^2 \quad \ldots \quad (2).$$

De vergelijkingen (1) en (2) van elkander aftrekkende, komt er

$$108+12x=400-40y,$$

of $$3x=73-10y,$$

de waarde van y uit deze vergelijking in (1) brengende, komt er

$$(x+6)^2=(x+3,924)^2+\left(\frac{73-3x}{10}\right)^2,$$

waaruit volgt

$$100(x+6)^2=100(x+3,924)^2+(73-3x)^2,$$

of $$0=3268,7776-853,2x+9x^2;$$

deze vergelijking opgelost zijnde, geeft

$$x=47,4\pm 43,4 \text{ nagenoeg,}$$

alzoo is $$x=90,8 \text{ of } 4 \text{ ellen.}$$

De eerste waarde van x zou voor y eene negatieve uitkomst geven, zoodat slechts de tweede uitkomst in eenen eigenlijken zin aan de vraag voldoet.

CCXXXI. VOORSTEL.

Door F. VAN HEUKELOM, JUN.

Eenen regthoekigen driehoek te vinden, zoodat de zijden in eene rekenkunstige reeks staan, en dat derzelver som gelijk zij aan het product der regthoekszijden?

OPGELOST *door* F. VAN HEUKELOM, JUN., J. BASSAN, K. C. COX, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. P. OTT, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. JONKHERT, B. LUBBERS, J. J. GASTMAN, N. J. SINGELS, R. SPRUIT, M. H. GODEFROI, C. VAN SCHAICK, J. SCHOTBORGH, HZN., M. SALOMO, E. OLIVIER, DZ., M. G. SNOER, G. BRANDSTEDER, M. L. GOEDE, M. DE LEON, J. WARNSINCK *en* J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN.

OPLOSSING *van* F. VAN HEUKELOM, JUN

Laten de zijden van den driehoek voorgesteld worden door

$$x-y,\quad x \text{ en } x+y,$$

dan is aan de eerste voorwaarde voldaan. De som dezer zijden is nu $3x$, en daar blijkbaar $x+y$ de hypotenusa moet voorstellen, zoo is het product der regthoekszijden $x(x-y)$, en wij hebben uit de tweede voorwaarde

$$3x=x(x-y);$$

eindelijk is nog, volgens de bekende eigenschap der regthoekige driehoeken,

$$(x-y)^2+x^2=(x+y)^2.$$

Deze laatste vergelijking ontwikkeld zijnde, geeft

$$x^4=4xy,$$

of

of $x = 4y$.

Deze waarde van x gesteld zijnde in de vergelijking

$$3x = x(x-y),$$

geeft $12y = 4y(4y-y) = 12y^2$,

of $y = 1$.

Hierdoor is dan $x = 4$, zoodat de gevraagde zijden worden

3, 4 en 5.

CCXXXII. VOORSTEL,

Door F. VAN HEUKELOM, JUN.

Men vraagt twee getallen welker som 20 *zij, en waarvan de som der vierde magten* 65792 *beloopt?*

OPGELOST *door* F. VAN HEULELOM, JUN., J. BASSAN, K. C. COX, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. DE LEON, J. WARNSINCK, R. SPRUIT, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. H. GODEFROI, N. J. SINGELS, B. LUBBERS, J. JONKHERT, J. SCHOTBORGH, Hz., C. VAN SCHAICK, G. BRANDSTEDER, M. L. GORDE, M. G. SNOER, J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN, J. P. OTT *en* J. J. GASTMAN.

OPLOSSING *van* F. VAN HEUKELOM, JUN.

Stel voor de beide getallen $10-x$ en $10+x$, dan is aan de eerste voorwaarde voldaan; de tweede voorwaarde geeft de vergelijking

$$(10-x)^4+(10+x)^4 = 65792;$$

hetwelk ontwikkeld zijnde, overgaat in

$$2x^4+1200x^2+20000 = 65792,$$

of in $x^4+600x^2 = 22896$.

Deze vergelijking volgens den regel voor de tweede magtsvergelijkingen opgelost zijnde, geeft

$$x^2 = -300 \pm \sqrt{112896},$$
$$= -300 \pm 336,$$

derhalve $x = \pm\sqrt{\{-300 \pm 336\}}$,

$$= \pm\sqrt{36},$$

of $x = \pm\sqrt{-636}$,

de laatste waarden onbestaanbaar zijnde, zoo hebben wij enkel

$$x = \pm 6,$$

en hierdoor wordt $10+x = 16$,

of $10-x = 4$;

terwijl omgekeerd men voor $x = -4$ vindt 4 of 16. Er beſtaat dus ſlechts een enkeld antwoord op deze vraag, zijnde de begeerde getallen 16 en 4.

CCXXXIII. VOORSTEL.

Door M. SALOMO.

Men vraagt door eene tweede magtsvergelijking drie op elkander volgende getallen te vinden, zoodanig dat de ſom van derzelver vierkanten afgetrokken van het vierkant van de ſom der getallen 1348 *bedragen?*

OPGELOST *door* M. SALOMO, J. JONKBERT, J. J. GASTMAN, J. P. OTT, K. C. COX, M. DE LEON, F. VAN HEUKELOM, JUN., D. HOOLA VAN NOOTEN, N. J. SINGELS, B. LUBBERS, J. SCHOTBORGH, HZN., J. BASSAN, R. SPRUIT, C. VAN SCHAICK, M. H. GODEFROI, M. L. GORDE, M. G. SNOER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, G. BRANDSTEDER *en* J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN.

OPLOSSING *van* M. SALOMO.

Stel voor de gevraagde op elkander volgende getallen

$$x-1,\quad x \text{ en } x+1,$$

dan is hunne ſom $3x$ en het vierkant dezer ſom $9x^2$. De ſom der vierkanten dezer getallen vindt men door

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$
$$x^2 = x^2,$$
$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

bij elkander te tellen, hetgeen geeft

$$3x^2 + 2.$$

Nu moet het verſchil dezer uitdrukkingen 1348 bedragen, wij hebben dus de vergelijking

$$9x^2 - (3x^2 + 2) = 1348,$$

of $6x^2 - 2 = 1348,$

dus $x^2 = 225,$

derhalve $x = \pm 15.$

De gevraagde getallen zijn dus

14, 15 en 16,

of $-16, -15$ en $-14.$

CCXXXIV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Er zijn drie ſtukken geld, waarvan de getallen, die de ſtuivers in

in dezelfde benut, aanwijzen, eenen gemeenen deeler hebben; hierdoor werkelijk deelende, bekomt men quotienten met de volgende eigenschappen. 1°. Is derzelver som gelijk aan het getal stuivers van het kleinste stuk. 2°. Het kleinste quotient met 1 verminderende vormen zij eene rekenkunstige reeks. 3°. Het grootste quotient met 1 vermeerderende zijn zij drie vierkante getallen, en 4°. het kleinste met 2 en het middelste met 1 vermeerderende, vormen zij drie driehoekige getallen. Welke waren de geldstukken?

OPGELOST *door* B. LOUBERS, J. MEUSCHERT VAN VOLLENHOVEN, J. JONKHERT, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. SALOMO, C. VAN SCHAICK *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* B. LOUBERS.

Stel voor de reeks in de tweede voorwaarde van het vraagstuk bedoeld

$$x,\ x+y \text{ en } x+2y,$$

dan volgt hieruit dat de quotienten zijn

$$x+1,\ x+y \text{ en } x+2y.$$

Volgens de derde voorwaarde moeten nu de getallen

$$x+1,\ x+y \text{ en } x+3y+1$$

vierkanten zijn. De achtervolgende verschillen dezer getallen zijn

$$y-1 \text{ en } y+1,$$

waarvan wederom het verschil is 2, indien alzoo de beide eerste getallen vierkanten zijn; dan zal het volgende het mede zijn, en de wortels dezer vierkanten zullen dan met de eenheid opklimmen. Men zal alzoo hebben

$$1+\sqrt{(x+1)}=\sqrt{(x+y)},$$

of $$2+x+2\sqrt{(x+1)}=x+y,$$

en dus $$2\sqrt{(x+1)}=y-2,$$

of $$4(x+1)=(y-2)^2=y^2-4y+4;$$

waaruit volgt $$4x=y^2-4y.$$

Eindelijk zullen volgens de vierde voorwaarde de getallen

$$x+3,\ x+y+1 \text{ en } x+2y$$

driehoekige getallen moeten zijn; en daar elk driehoekig getal achtmaal genomen en de eenheid daarbij gevoegd, een vierkant geeft, zoo moeten

$$8x+25,\ 8x+8y+9$$

en $$8x+16y+1$$

vier-

vierkanten zijn. De verſchillen tuſſchen deze getallen zijn

$$8y-16 \text{ en } 8y-8,$$

waarvan het verſchil 8 bedraagt. Nu is het bekend, dat bij eene reeks van vierkantsgetallen, wier wortels met gelijke verſchillen s opklimmen, de tweede verſchillen gelijk $2s^2$ zijn; in de hier gegevene reeks is dit tweede verſchil $=8$, en dus het verſchil der wortels $=2$, ſchrijft men dus in de gevondene vierkanten voor $4x$ zijne waarde y^2-4y, dan worden dezelven

$$2y^2-8y+25, \quad 2y^2+9$$

en

$$2y^2+8y+1.$$

De wortels dezer vierkanten nu twee verſchillende, heeft men

$$2+\sqrt{(2y^2-8y+25)}=+\sqrt{(2y^2+9)},$$

en hieruit volgt

$$29-8y+2y^2+4\sqrt{(2y^2-8y+25)}=2y^2+9,$$

of

$$\sqrt{(2y^2-8y+25)}=2y-5,$$

als mede $\quad 2y^2-8y+25=4y^2-20y+25,$

waaruit men vindt $\quad 2y-8=4y-20,$

of

$$y=6.$$

Men had ook kunnen ſtellen

$$2+\sqrt{(2y^2+9)}=\sqrt{(2y^2+8y+1)},$$

en dit geeft

$$13+2y^2+4\sqrt{(2y^2+9)}=2y^2+8y+1,$$

of

$$\sqrt{(2y^2+9)}=2y-3,$$

en dus $\quad 2y^2+9=4y^2-12y+9,$

waaruit mede volgt $\quad y=6,$

zoodat, daar beide onderſtellingen dezelfde waarde voor y geven, het blijkt, dat men de wortels der drie bedoelde vierkante getallen met een gelijk verſchil heeft mogen doen opklimmen.

Daar wij dan nu mogen ſtellen $y=6$, en wij reeds gevonden hebben

$$4x=y^2-4y,$$

zoo geeft dit $\quad 4x=36-24=12,$

of

$$x=3.$$

De quotienten in het voorſtel bedoeld zijn dan nu 4, 9 en 15, het getal ſtuivers in het kleinſte geldſtuk is dus $4+9+15=28$, en daar het quotient van dit getal met den gemeenen deeler 4 moet zijn, is dus deze gemeene deeler 7, en alzoo het getal ſtui-

ſtuivers der beide andere ſtukken 63 en 105; alzoo eindelijk de bedoelde muntſtukken een Goudgulden, een Dukaton en een Dukaat.

CCXXXV. VOORSTEL.

Door B. G. van Kell.

Van twee getallen is de ſom der vierkanten gelijk 20, *en de ſom der derde magten, gedeeld door de ſom der getallen, gelijk* 12. *Men vraagt naar de getallen?*

Opgelost *door* B. G. van Kell, G. Brandsteder, M. L. Gorde, M. G. Snoer, J. J. Gastman, M. Salomo, C. van Schaick, M. H. Godefroi, N. J. Singels, J. P. Ott, K. C. Cox, J. Jonkhert, W. J. C. Rammelman Elsevier, D. Hoola van Nooten, M. de Leon, R. Spruit, J. Schotborgh, Hz., J. Warnsinck, J. Bassan, E. Olivier, Dz., B. Lubbers, F. van Heukelom en J. Messchert van Vollenhoven.

Oplossing *van* B. G. van Kell.

Stel voor de gevraagde getallen x en y, dan geeft het voorſtel onmiddelijk de twee vergelijkingen

$$x^2+y^2=20,$$

en

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=12.$$

In deze laatſte vergelijking de deeling verrigtende, komt er

$$x^2-xy+y^2=12;$$

en dit van de eerſte vergelijking afgetrokken, komt er

$$xy=8.$$

Het dubbel van deze vergelijking afgetrokken en bijgeteld aan de eerſte vergelijking, geeft

$$x^2-2xy+y^2=4,$$

en

$$x^2+2xy+y^2=36,$$

waaruit dadelijk volgt

$$(x-y)^2=4,$$

of $x-y=\pm 2$

en $x+y=\pm 6$ $\Big\}$ . . . . . (1).

Uit de ſom dezer laatſte vergelijkingen vindt men nu

$$x=\pm 4.$$

Doch men kan ook het bovenſte teeken in de eene vergelijking ver-

verbinden met het benedenſte van de tweede en omgekeerd, en hierdoor heeft men dan nog

$$x = \pm 2.$$

Uit het verſchil der vergelijkingen (1) hebben wij even eens

$$y = \pm 2,$$

of het bovenſte teeken der eene vergelijking met het benedenſte van de andere verbindende

$$y = \pm 4.$$

De onderſcheidene antwoorden zijn dan

$$x = 4 \quad y = 2,$$
$$x = -4 \quad y = -2,$$
$$x = 2 \quad y = 4,$$

en

$$x = -2 \quad y = -4,$$

welke echter, ſlechts twee onderſcheidene uitkomsten geven, de eene poſitief en de andere negatief.

CCXXXVI. VOORSTEL.

Door M. G. SNOER.

Iemand ſpeelt onderſcheidene partijen; in de eerſte verliest hij $\frac{1}{b}$ *van zijn geld en nog* $\frac{1}{b}$ *gulden, in de tweede verliest hij* $\frac{1}{b}$ *van hetgeen hij heeft overgehouden met nog* $\frac{1}{b}$ *gulden. Dit zelfde geſchiedt hem in al de volgende partijen, tot dat hij, na de* n^{e} *partij, nog* a *gulden overhoudt. Met hoe veel geld begon hij te ſpeelen?*

OPGELOST *door* M. G. SNOER, J. JONKHERT, J. BASSAN, J. SCHOTBORGH, Hz., W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. DE LEON *en* J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN.

OPLOSSING *van* M. G. SNOER.

Stel dat men begon te ſpeelen x gulden bezittende, dan is het verlies in de eerſte partij

$$\frac{x}{b} + \frac{1}{b} = \frac{x+1}{b},$$

het overſchot is dus

$$x - \frac{x+1}{b} = \frac{b-1}{b}x - \frac{1}{b}.$$

Het verlies in de tweede partij is

$b-1$

$$\frac{b-1}{b^2}x-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b},$$

het verſchil is dus

$$\frac{b-1}{b}x-\frac{1}{b}-\left\{\frac{b-1}{b^2}x-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b}\right\}$$
$$=\frac{(b-1)^2}{b^2}x-\frac{b-1}{b^2}-\frac{1}{b}.$$

Het verlies in de derde partij is dan wederom

$$\frac{(b-1)^2}{b^2}x-\frac{b-1}{b^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b},$$

of $$\frac{(b-1)^2}{b^2}x-\frac{b-1}{b^2}+\frac{b-1}{b^2},$$

en derhalve het overſchot

$$\frac{(b-1)^2}{b^2}x-\frac{b-1}{b^2}-\frac{1}{b}-\left\{\frac{(b-1)^2}{b^2}x-\frac{b-1}{b^2}+\frac{b-1}{b^2}\right\}$$
$$=\frac{(b-1)^2}{b^2}x-\frac{(b-1)^2}{b^2}-\frac{b-1}{b^2}-\frac{1}{b}.$$

Nu is het niet moeijelijk in te zien dat het overſchot na de vierde partij zal zijn

$$\frac{(b-1)^4}{b^4}x-\frac{(b-1)^3}{b^4}-\frac{(b-1)^2}{b^3}-\frac{b-1}{b^2}-\frac{1}{b},$$

en dat in het algemeen na de $n$de partij het overſchot zijn zal

$$\frac{(b-1)^n}{b^n}x-\frac{(b-1)^{n-1}}{b^n}-\frac{(b-1)^{n-2}}{b^{n-1}}\ldots\ldots-\frac{1}{b}.$$

De tweede en volgende termen dezer uitdrukking vormen eene meetkunstige reeks, waarvan de rede is $\frac{b}{b-1}$, zoodat men voor de geheele uitdrukking mag ſchrijven

$$\frac{(b-1)^n}{b^n}x-\left(1-\frac{(b-1)^n}{b^n}\right);$$

volgens de voorwaarde van het voorſtel hebben wij dan

$$\frac{(b-1)^n}{b^n}x-\left(1-\frac{(b-1)^n}{b^n}\right)=a \quad \ldots \quad (1),$$

of $$(b-1)^n x=ab^n+b^n-(b-1)^n,$$
$$=(a+1)b^n-(b-1)^n,$$

en dus $$x=\frac{b^n}{(b-1)^n}(a+1)-1.$$

Aanmerking. Indien men gevraagd had in hoe vele puntijen eene gegevene som van x gulden verspeeld zoude geweest zijn, dan heeft men slechts in de vergelijking (1) $a=0$ te stellen, en dan vindt men

$$(b-1)^n x - b^n + (b-1)^n = 0;$$

of

$$(b-1)^n (x+1) = b^n;$$

aan beide zijden de logarithmen nemende, vindt men

$$n\,Log.(b-1) + Log.(x+1) = n\,Log.b,$$

en daaruit

$$n = \frac{Log.(x+1)}{Log.b - Log.(b-1)},$$

$$= \frac{Log.(x+1)}{Log.\frac{b}{b-1}}.$$

CCXXXVII. Voorstel.

Door M. H. Godefroi.

Men vraagt naar eene arithmetische reeks van 4 termen, zoodanig, dat wanneer men bij den eersten term de eenheid voegt er eene geometrische evenredigheid ontsta?

Opgelost *door* M. H. Godefroi, W. J. C. Rambelman Elsevier, M. de Leon, J. Warnsinck, F. van Heukelom, J. Bassan, M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, J. Jonkhert, J. Ja Gastman, N. J. Singels, M. G. Snoer, R. Spruit, J. Schotborgh, Hz., B. Lubbers *en* G. Brandsteder.

Oplossing *van* M. H. Godefroi.

Stel dat de gevraagde rekenkunstige reeks zij

$$x,\ x+y,\ x+2y \text{ en } x+3y,$$

dan zou, volgens het voorstel,

$$x+1,\ x+y,\ x+2y \text{ en } x+3y,$$

eene meetkunstige evenredigheid moeten zijn, en dit vereischt dat men hebbe

$$(x+1)(x+3y) = (x+y)(x+2y),$$

of, na ontwikkeling

$$x = y(2y-3).$$

Voor y nu elk willekeurig getal nemende, zal aan de vraag voldaan zijn. Zoo is voor $y=2$

$$x=2,$$

en de reeks 2, 4, 6 en 8.

CCXXXVIII.

CCXXXVIII. VOORSTEL.

Door J. BADON GHYBEN.

Te onderzoeken of, en zoo ja, op hoe vele en welke wijze een geheel getal kan verdeeld worden in twee andere geheele getallen, welker product een volkomen vierkant zij?

OPGELOST *door* J. BADON GHYBEN, M. G. SNOEK *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. BADON GHYBEN.

Stel het gegeven getal $= a$ en deszelfs deelen $\frac{1}{2}a + x$ en $\frac{1}{2}a - x$; dan is het product dezer deelen $\frac{1}{4}a^2 - x^2$. Deze uitdrukking moet nu, volgens het gevraagde, een volkomen vierkant zijn, en daar de wortel van dit vierkant blijkbaar kleiner dan $\frac{1}{2}a$ zijn moet, zoo ſtellen wij

$$\frac{1}{4}a^2 - x^2 = (\tfrac{1}{2}a - yx)^2,$$

waaruit volgt $$x = \frac{ay}{y^2+1},$$

en $$xy = \frac{ay^2}{y^2+1}.$$

Het voorſtel is dus terug gebragt om voor y zulke waarden te kiezen dat $\frac{1}{2}a + x$ of $\frac{1}{2}a - x$ geheele getallen worden; en hierbij onderſcheiden wij twee gevallen naarmate het gegeven getal a even of oneven is.

Is a even, dan zal $\frac{1}{2}a$ een geheel getal zijn, en derhalve moet alsdan x mede een geheel getal wezen. Nu kunnen echter y^2+1 en y geene gemeene deelers hebben, derhalve zal y^2+1 in a deelbaar moeten zijn; men zal moeten onderzoeken of a geene deelers van den vorm y^2+1 heeft; en hiertoe kan men gemakkelijk geraken door van elk der deelers van a de eenheid af te trekken, en te zien of de rest een volkomen vierkant is; zoo vele deelers nu van den vorm b^2+1 welke a bevat zoo veel maal zal het gegeven getal op de begeerde wijze verdeeld kunnen worden.

Zij, bij voorbeeld, het getal 170, dan zijn deszelfs deelers van den vorm y^2+1

1, 2, 5, 10, 17 en 170,

en de waarde van y

0, 1, 2, 3, 4 en 13,

zoodat x wordt

0, 85, 68, 51, 40 en 13,

en $\frac{1}{2}a+x$

85, 170, 153, 136, 125 en 98,

alsmede $\frac{1}{2}a-x$

85, 0, 17, 34, 45 en 72,

de producten der deelen zijn nu

85^2, 0^2, 51^2, 68^2, 75^2 en 84^2.

Indien het gegeven getal oneven is, dan zal $2x$ oneven moeten zijn, en dus wij hebben

$$2x = \frac{2ab}{y^2+1},$$

zoo zal ook het tweede lid dezer vergelijking oneven moeten worden. Neemt men nu voor y een even getal dan is y^2+1 oneven, en daar deze laatste uitdrukking een deeler van a moet wezen, zoo zal $2x$ ook even worden; neemt men y oneven dan is y^2+1 even en $\frac{1}{2}(y^2+1)$ oneven, hetwelk nu in a gedeeld een oneven quotient geeft; men zal dus al de deelers van a moeten nemen (welke blijkbaar oneven zijn) van het dubbeld derzelven de eenheid aftrekken, en onderzoeken of de rest een vierkant zij, zoo ja, dan is de verdeeling mogelijk en kan zoo dikmaals herhaald worden als er deelers in a gevonden worden die de genoemde eigenschap bezitten.

Laat het getal 325 gegeven zijn, dan zijn de deelers welke dubbeld genomen en met de eenheid verminderd een vierkant geven

1, 5, 13 en 25.

De overeenkomstige waarden van y zijn dus

1, 3, 5 en 7,

alzoo $2x$

325, 195, 125 en 91,

derhalve $\frac{1}{2}a+x$

325, 260, 225 en 208,

en $\frac{1}{2}a-x$

0, 65, 100 en 117;

de producten der deelen zijn dus

0^2, 130^2, 150^2 en 156^2.

CCXXXIX. VOORSTEL.

Door J. BADON GHYBEN.

Men vraagt de uitdrukking $\partial x \sqrt{(hx - x^2)}$ *zoodanig te herleiden, dat derzelver integraal in den vorm* $F(x) + A$ *Boog. Tang.* $F'(x)$ *gevonden worde?*

OPGELOST *door* J. BADON GHYBEN, R. LOBATTO *en* J. JONKHART.

I. OPLOSSING *van* J. BADON GHYBEN.

Men ſtelle in de gegevene uitdrukking

$$x = \frac{(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2}\, h,$$

dan is

$$\partial x = \frac{8hz(z^2-1)}{(z^2+1)^3}\partial z,$$

$$z = \frac{\sqrt{h}+\sqrt{x}}{\sqrt{(h-x)}},$$

en

$$\int \partial x \sqrt{(hx-x^2)} = 16h \int \frac{z^6 - 2z^4 + z^2}{(z^2+1)^5}\partial z \quad . \quad (1).$$

Nu heeft men volgens de bekende regels

$$\frac{z^6-2z^4+z^2}{(z^2+1)^5} = -\frac{4}{(z^2+1)^5} + \frac{8}{(z^2+1)^4} - \frac{5}{(z^2+1)^3} + \frac{1}{(z^2+1)^2} \quad (2).$$

Elk dezer gebrokens met ∂z vermenigvuldigd, moeten nu achtervolgens geïntegreerd worden. Wij hebben dan door de bekende herleidings-formule

$$\int \frac{\partial z}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{\partial z}{(z^2+1)^{n-1}},$$

$$\int \frac{\partial z}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \tfrac{1}{2}\, \textit{Boog. Tang.}\, z;$$

verder

$$\int \frac{\partial z}{(z^2+1)^3} = \frac{z}{6(z^2+1)^3} + \frac{5z}{24(z^2+1)^2} + \frac{5z}{16(z^2+1)} \ldots + \tfrac{5}{16}\, \textit{Boog. Tang.}\, z,$$

$$\int \frac{\partial z}{(z^2+1)^5} = \frac{z}{8(z^2+1)^4} + \frac{7z}{48(z^2+1)^3} + \frac{35z}{192(z^2+1)^2} + \frac{35z}{128(z^2+1)} + \tfrac{35}{128}\, \textit{Boog. Tang.}\, z.$$

Alle deze verſchillende integralen overbrengende in (2) komt er

$$\int \frac{z^6 - 2z^4 + z^2}{(z^2+1)^5} \partial z = -\tfrac{1}{4} \cdot \frac{z}{(z^2+1)^4} + \tfrac{3}{4} \cdot \frac{z}{(z^2+1)^3}$$

$$- \tfrac{5}{16} \cdot \frac{z}{(z^2+1)^2} + \tfrac{15}{32} \cdot \frac{z}{z^2+1} + \tfrac{15}{32} \text{ Boog. Tang. } z,$$

$$= \frac{z}{32} \left\{ \frac{1}{z^2+1} - \frac{10}{(z^2+1)^2} + \frac{24}{(z^2+1)^3} - \frac{16}{(z^2+1)^4} \right\} \ldots$$

$$+ \tfrac{15}{32} \text{ Boog Tang. } z.$$

Dus is volgens (1)

$$\int \partial x \sqrt{(hx - x^2)}$$

$$= \frac{h^2 z}{2(z^2+1)} \left\{ 1 - \frac{10}{z^2+1} + \frac{24}{(z^2+1)^2} - \frac{16}{(z^2+1)^3} \right\} + \frac{h^2}{2} \text{ Boog. Tang. } z.$$

Hierin nu voor z zijne waarde ſtellende vindt men, door eene vrij langwijlige herleiding

$$\int \partial x \sqrt{(hx - x^2)} = \tfrac{1}{4}(2x - h)\sqrt{(hx - x^2)} + \tfrac{1}{8} h^2 \text{ Boog. Tang. } \frac{\sqrt{h} + \sqrt{x}}{\sqrt{(h-x)}} + C.$$

II. Oplossing *door* R. Lobatto.

De voorgeſtelde uitdrukking kan geſchreven worden onder den vorm

$$\int \partial x \sqrt{x} \sqrt{(h-x)},$$

waarin blijkbaar x altijd poſitief en kleiner dan h moet zijn; wij kunnen dus ſtellen

$$x = h \text{ Sin}^2 . \phi,$$

waaruit volgt

$$\partial x = 2h \text{ Sin. } \phi \text{ Cos. } \phi \partial \phi$$
$$= h \text{ Sin. } 2\phi \partial \phi.$$

De voorgeſtelde uitdrukking wordt dan

$$\int \partial x \sqrt{(hx - x^2)} = \int h \text{ Sin. } 2\phi . \partial \phi . h \text{ Sin. } \phi \text{ Cos. } \phi$$
$$= \tfrac{1}{2} h^2 \int \text{Sin}^2 . 2\phi \partial \phi.$$

Volgens I. R. Schmidt, *Differentiaal- en Integraal-Rekening*, §. 245. is nu in het algemeen

$$\int \text{Sin}^2 . \psi \partial \psi = -\tfrac{1}{2} \text{ Sin. } \psi \text{ Cos. } \psi + \tfrac{1}{2} \psi,$$

derhalve

$$\int \text{Sin}^2 . 2\phi \partial \phi = \tfrac{1}{2} \int \text{Sin}^2 . 2\phi \partial 2\phi$$
$$= \tfrac{1}{2} \{ -\tfrac{1}{2} \text{ Sin. } 2\phi \text{ Cos. } 2\phi + \phi \},$$

en wij hebben dus

$$\int \partial x \sqrt{(hx - x^2)} = \frac{h^2}{4} \{ -\tfrac{1}{2} \text{ Sin. } 2\phi \text{ Cos. } 2\phi + \phi \}.$$

Mar

Maar nu is $Sin.\phi = \sqrt{\frac{x}{h}}$,

of $Tang.\phi = \frac{\sqrt{\frac{x}{h}}}{\sqrt{(1-\frac{x}{h})}}$

$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(h-x)}}$.

en dus $\phi = Boog.Tang.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(h-x)}}$,

als mede $Cos.\phi = \sqrt{(1-\frac{x}{h})} = \frac{\sqrt{(h-x)}}{\sqrt{h}}$,

derhalve $2\,Sin.\phi\,Cos.\phi = Sin.2\phi = \frac{2\sqrt{x(h-x)}}{h}$,

en $Cos.2\phi = \sqrt{(1-Sin^2.2\phi)} = \sqrt{\{1-\frac{4(hx-x^2)}{h^2}\}}$

$= \frac{\sqrt{(h^2-4hx+4x^2)}}{h^2} = \frac{h-2x}{h}$.

Hieruit hebben wij dan

$$\int \partial x \sqrt{(hx-x^2)} = \frac{h^2}{4}\left\{\frac{2x-h}{2h}.\frac{2\sqrt{(xh-x^2)}}{h} + \ldots . + Boog.Tang.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(h-x)}}\right\},$$

$$= \tfrac{1}{4}(2x-h)\sqrt{(hx-x^2)} + \frac{h^2}{4}\,Boog.\,Tang.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(h-x)}} + C.$$

Aanmerking *van* J. P. Delprat. De uitkomst dezer herleiding met die der voorgaande oplossing vergelijkende, zoude het schijnen dat zij niet overeen kwamen in het gedeelte welke de *Boogtangens* bevat; doch in aanmerking nemende dat

$$\phi = \tfrac{1}{2}(2\phi) = \tfrac{1}{2}\,Boog.Tang.\frac{2\,Tang.\phi}{1-Tang^2.\phi}$$

is, zoo heeft men uit de laatste vergelijking der eerste oplossing

$$\tfrac{1}{2}\,Boog.Tang.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{h}}{\sqrt{(h-x)}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,Boog.Tang.\frac{2\frac{\sqrt{h}+\sqrt{x}}{h-x}}{1-\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{h})^2}{h-x}},$$

$$= \tfrac{1}{4} Boog.Tang. \frac{2(\sqrt{h}+\sqrt{x})\sqrt{(h-x)}}{h-x-(\sqrt{x}+\sqrt{h})^2},$$

$$= \tfrac{1}{4} Boog.Tang. \frac{(\sqrt{h}+\sqrt{x}\sqrt{h-x})}{-x-\sqrt{xh}},$$

$$= -\tfrac{1}{4} Boog.Tang. \frac{\sqrt{(h-x)}}{\sqrt{x}},$$

$$= -\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}\pi - Boog.Cot. \frac{\sqrt{(h-x)}}{\sqrt{x}}),$$

$$= -\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}\pi - Boog.Tang. \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(h-x)}}).$$

Deze waarde nu gesteld in de uitkomst der eerste oplossing, en in aanmerking nemende dat de term $-\frac{1}{8}\pi$ bij de standvastige gevoegd mag worden, zal het blijken dat beide oplossingen volmaakt dezelfde zijn.

CCXL. VOORSTEL.

Door J. BADON GHYBEN.

Men vraagt uit de vergelijking $\frac{3}{2}\pi + Boog.Sin.x = 4\,Boog.Tang.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}}$ *de waarde van* x *in eene algebraïsche functie der bekende grootheden uit te drukken?*

OPGELOST *door* J. BADON GHYBEN, R. LOBATTO *en* J. JONKHERT.

I. OPLOSSING *van* J. BADON GHYBEN.

Omdat $Boog.Sin. - 1 = \frac{3}{2}\pi$ is, kan men de voorgestelde vergelijking ook schrijven onder den vorm

$$Boog.Sin. - 1 + Boog.Sin.x = 4\,Boog.Tang.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}},$$

en door de algemeene formule

$$Boog.Sin.p + Boog.Sin.q = Boog.Sin.\left\{p\sqrt{(1-q^2)}+q\sqrt{(1-p^2)}\right\},$$

gaat onze vergelijking over in

$$Boog.Sin. - x\sqrt{(1-x^2)} = 4\,Boog.Tang.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}}.$$

In het algemeen is ook

$$2\,Boog.Tang.q = Boog.Tang.\frac{2q}{1-q^2},$$

derhalve

$$2\,Boog.\,Tang.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}}=Boog.\,Tang.\frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{(a-b)}}{a-b-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$=Boog.\,Tang.-\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{(a-b)}}{b+\sqrt{ab}}$$

$$=Boog.\,Tang.-\frac{\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{b}}$$

Nu kan men op dezelfde wijze vinden

$$4\,Boog.\,Tang.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}}=2\,Boog.\,Tang.-\frac{\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{b}},$$

en herleiden tot

$$Boog.\,Tang.\frac{-2\sqrt{(a-b)}\,b}{b-(a-b)},$$

$$=Boog.\,Tang.-\frac{2\sqrt{(a-b)}\,b}{2b-a}.$$

Onze vergelijking wordt dus

$$Boog.\,Sin.-\sqrt{(1-x^2)}=Boog.\,Tang.\frac{2\sqrt{(a-b)}\,b}{a-2b};$$

omdat nu $Tang.\,p=\frac{Sin.\,p}{Cos.\,p}=\frac{Sin\,p}{\sqrt{(1-Sin^2.\,p)}}$ is, hebben wij verder

$$Boog.\,Tang.\frac{2\sqrt{(a-b)}\,b}{a-2b}=Boog.\,Tang.\frac{-\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-(1-x^2))}},$$

en dus $$\frac{2\sqrt{(a-b)}\,b}{a-2b}=\frac{-\sqrt{(1-x^2)}}{x}.$$

Deze vergelijking in het vierkant gebragt geeft

$$\frac{4b(a-b)}{(a-2b)^2}=\frac{1-x^2}{x^2},$$

of $$4x^2b(a-b)=(1-x^2)(a-2b)^2$$

$$=(a-2b)^2-x^2(a-2b)^2,$$

en dus $$x^2(4ab-4b^2+(a-2b)^2)=(a-2b)^2,$$

waaruit volgt $$x^2=\frac{(a-2b)^2}{a^2},$$

of $$x=\pm\frac{a-2b}{a}.$$

Het bovenste teeken van het tweede lid der laatste vergelijking moet echter hier alleen genomen worden; om zich hiervan te over-

overeenigen ſubſtituere men de tweede waarde in de gegevene vergelijking, dan vindt men

$$\tfrac{3}{2}\pi + Boog.Sin.\frac{2b-a}{a} = 4\,Boog.Tang.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}}.$$

Deze vergelijking zou nu voor alle waarden van a en b door moeten gaan, dewijl dezelve identiek is, men neme nu dan $b = 0$, zoo vindt men

$$\tfrac{3}{2}\pi + Boog.Sin.-1 = 4\,Boog.Tang.1 \quad . \quad . \quad . \quad (a),$$

of $\tfrac{3}{2}\pi + \tfrac{3}{2}\pi = 2\pi$,

hetgeen ongerijmd is; verder is in het algemeen, n een geheel getal zijnde,

$$Boog.Sin.-1 = (2n+\tfrac{3}{2})\pi,$$

en $$Boog.Tang.1 = (n+\tfrac{1}{4})\pi,$$

men zou dus kunnen ſtellen

$$\tfrac{3}{2}\pi + (2n+\tfrac{3}{2})\pi = (n+\tfrac{1}{4})\pi,$$

hetwelk echter altijd ongerijmd is.

Het is overigens duidelijk dat de wortel $\frac{a-2b}{a}$ de vergelijking (a) werkelijk identiek maakt.

II. Oplossing *door* R. Lobatto.

Men ſtelle in de gegevene vergelijking $\sqrt{a} = m$ en $\sqrt{b} = n$, dan wordt het tweede lid

$$4\,Boog.Tang.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}} = 4\,Boog.Tang.\frac{m+n}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$$

$$= 4\,Boog.Tang.\sqrt{\frac{m+n}{m-n}};$$

en daar in het algemeen

$$2\,Boog.Tang.z = Boog.Tang.\frac{2z}{1-z^2}$$

is, zoo gaat de voorgaande uitdrukking over in

$$2\,Boog.Tang.\frac{2\sqrt{(m+n)}\sqrt{(m-n)}}{m-n-(m+n)},$$

$$= 2\,Boog.Tang.-\frac{\sqrt{(m^2-n^2)}}{n},$$

$$= 2\pi - 2\,Boog.Tang.\frac{\sqrt{(m^2-n^2)}}{n},$$

$= 2$

$$= 2\pi - 2\,Boog.Secans.\frac{m}{n},$$

$$= 2\pi - 2\,Boog.Cos.\frac{n}{m}.$$

Maar nu is ook in het algemeen

$$Cos.2\phi = 2\,Cos^2.\phi - 1,$$

of $$2\phi = Boog.Cos.(2\,Cos^2.\phi - 1).$$

en dus $$2\,Boog.Cos.\frac{n}{m} = Boog.Cos.(2\frac{n^2}{m^2} - 1).$$

Wij kunnen dus voor het tweede lid der voorgeſtelde vergelijking ſchrijven

$$2\pi - Boog.Cos.(2\frac{n^2}{m^2} - 1),$$

en derhalve voor de gegevene vergelijking

$$\tfrac{3}{2}\pi + Boog.Sin.x = 2\pi - Boog.Cos.(2\frac{n^2}{m^2} - 1),$$

of $$Boog.Sin.x = \tfrac{1}{2}\pi - Boog.Cos.(2\frac{n^2}{m^2} - 1),$$

en dus $$Boog.Sin.x = Boog.Sin.(2\frac{n^2}{m^2} - 1),$$

of $$x = 2\frac{n^2}{m^2} - 1;$$

hierin voor n en m hunne waarden geſteld, komt er even als in de voorgaande oplosſing

$$x = 2\frac{b}{a} - 1 = \frac{2b - a}{a}.$$

CCXLI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Wanneer men in eenen gelijkzijdigen driehoek een willekeurig punt aanneemt, en uit dit punt loodlijnen naar de overſtaande zijden trekt, dan zal de ſom dezer loodlijnen gelijk zijn aan de hoogte van den gelijkzijdigen driehoek. Ook zal het vierkant van eene der zijden van den gelijkzijdigen driehoek gelijk zijn aan den inhoud van den regelmatigen twaalfhoek in den omgeſchreven cirkel van dien driehoek beſchreven. Men vraagt naar het bewijs?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. HOOLA

Deze vergelijkingen ontwikkeld, veranderen in

$$2x.4xy = 864,$$

en $$2y(2x^2+2y^2) = 540,$$

of in $$x^2y = 108,$$

en $$yx^2+y^3 = 135.$$

De eerſte vergelijking van de tweede afgetrokken geeft

$$y^3 = 27,$$

of $$y = 3;$$

hierdoor verandert de vergelijking $x^2y = 108$ in

$$x^2 = 36,$$

en derhalve $$x = \pm 6.$$

De getallen zijn derhalve

$$x-y = 3,$$

en $$x+y = 9,$$

of $$x-y = -9,$$

en $$x+y = -3,$$

welke antwoorden ſlechts in de teekens verſchillen.

CCXLIII. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Een vierhoek kan in eenen cirkel beſchreven worden, men vraagt denzelven te berekenen, wanneer gegeven zijn de ſtralen der cirkels welke twee der zijden inwendig en de andere uitwendig aanraken?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU *en* J. JONKHART.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Zij ABCD (*Fig.* 93) de gezochte vierhoek, en O, O′, O″ en O‴ de middelpunten der cirkels waarvan de ſtralen bekend zijn, namelijk $Om = Om' = Om'' = R$, $O'n = O'n' = O'n'' = R'$, $O''p = O''p' = O''p'' = R''$ en $O'''q = O'''q' = O'''q'' = R'''$, dan zullen de lijnen OO′, O′O″, O″O‴ en O‴O welke de middelpunten vereenigen door de ſnijpunten A, B, C en D de raaklijnen An' met Cm'' enz. gaan, en alzoo de ſupplementen der hoeken van den vierhoek midden door deelen. Nu heeft men verder

$$Aq'' = Aq, \quad Bn' = Bn,$$

dus $$q''n' = AB+Aq+Bn,$$

als mede $$Dq' = Dq, \quad Cn'' = Cn,$$

dus ook $$q'n'' = CD+Dq+Cn;$$

bij

bij gevolg

$$q'' n' + q' n'' = AB + CD + (A q + D q) + (B n + C n)$$
$$= AB + BC + CD + DA,$$

en daar blijkbaar $n' q'' = n'' q'$ is, heeft men

$$q' n'' = n' q'' = \tfrac{1}{2}(AB + BC + CD + DA).$$

Op dezelfde wijzen zal men vinden

$$p'' m' = p' m'' = \tfrac{1}{2}(AB + BC + CD + DA),$$

waaruit volgt

$$q' n'' = n' q'' = p'' m' = p' m'' \quad \ldots \quad (1).$$

Nu heeft men verder

$$q'' n' = A q'' + A m + B m + B n',$$

en daar $A q'' + A m = (O'' q'' + O m)\, Cot.\, OA\, m$,

als mede $B m + B n' = (O m + O' n')\, Cot.\, OB\, m$

is, zoo heeft men, daar $OA\, m = \tfrac{1}{2}(180 - A)$ en $OB\, m = \tfrac{1}{2}(180 - B)$ is,

$$q'' n' = (R''' + R)\, Tang.\, \tfrac{1}{2} A + (R + R')\, Tang.\, \tfrac{1}{2} B.$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$p' m'' = (R + R')\, Tang.\, \tfrac{1}{2} B + (R' + R'')\, Tang.\, \tfrac{1}{2} C,$$
$$q' n'' = (R' + R'')\, Tang.\, \tfrac{1}{2} C + (R'' + R''')\, Tang.\, \tfrac{1}{2} D,$$

dewijl volgens (1) de eerste leden dezer drie vergelijkingen aan elkander gelijk zijn, vindt men gemakkelijk uit dezelven

$$(R''' + R)\, Tang.\, \tfrac{1}{2} A = (R' + R'')\, Tang.\, \tfrac{1}{2} C,$$

en $(R + R')\, Tang.\, \tfrac{1}{2} B = (R'' + R''')\, Tang.\, \tfrac{1}{2} D.$

Daar nu de vierhoek ABCD in eenen cirkel kan beschreven worden, zoo is $A + C = 180$ en $B + D = 180°$, waaruit volgt $\tfrac{1}{2} A = 90 - \tfrac{1}{2} C$ en $\tfrac{1}{2} B = 90 - \tfrac{1}{2} D$, of $Tang.\, \tfrac{1}{2} A = Cot.\, \tfrac{1}{2} C$ en $Tang.\, \tfrac{1}{2} B = Cot.\, \tfrac{1}{2} D$; hierdoor veranderen de laatste vergelijkingen in

$$(R''' + R) = (R' + R'')\, Tang^2.\, \tfrac{1}{2} C,$$

en $(R + R') = (R'' + R''')\, Tang^2.\, \tfrac{1}{2} D,$

dus $$Tang^2.\, \tfrac{1}{2} C = \frac{R''' + R}{R' + R''},$$

en $$Tang^2.\, \tfrac{1}{2} D = \frac{R + R'}{R'' + R'''},$$

als mede $$Tang^2.\, \tfrac{1}{2} B = \frac{R'' + R'''}{R + R'},$$

en

en $$Tang^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{R'+R''}{R'''+R}$$

De hoeken van den vierhoek bekend zijnde, zoo worden de zijden gemakkelijk gevonden; men heeft namelijk

$$AB = Ax + Bx = O\,x\,Cos.\,OAx + O\,x\,Cos.\,OBx$$
$$= R\,(Tang.\tfrac{1}{2}A + Tang.\tfrac{1}{2}B),$$

dus $$AB = R\frac{Sin.\frac{1}{2}(A+B)}{Cos.\frac{1}{2}A\ Cos.\frac{1}{2}B},$$

of ook door voor $Tang.\frac{1}{2}A$ en $Tang.\frac{1}{2}B$ hunne waarden te ſtellen

$$AB = R\left\{V\left(\frac{R'+R''}{R+R'''}\right)+V\left(\frac{R''+R'''}{R+R'}\right)\right\},$$

en zoo ook voor de overige zijder.

CCXLIV. VOORSTEL

Door L. F. Beaulieu.

Men vraagt eenen vierhoek, die in eenen cirkel kan beſchreven worden, te berekenen, als gegeven zijn de inhoud, de omtrek en de hoeken van den vierhoek?

Opgelost *door* L. F. Beaulieu, J. Jonkheer *en* J. Baisan.

Oplossing *van* L. F. Beaulieu.

Laat ABCD (*Fig.* 94) de bedoelde vierhoek zijn, en ſtellen wij de onbekende zijden $AB = u$, $BC = x$, $CD = y$ en $AD = z$; verder den gegevenen inhoud $= s$ en de omtrek $u+x+y+z = 2p$. De driehoeken BAD en BCD geven

$$BD^2 = u^2 + z^2 - 2uz\,Cos.\,A,$$
$$BD^2 = x^2 + y^2 - 2xy\,Cos.\,C,$$

en daar $Cos.\,C = -Cos.\,A$ is, zoo heeft men

$$x^2+y^2+2xy\,Cos\,A = u^2+z^2-2uz\,Cos.\,A,$$

of $$Cos.\,A = \frac{u^2+z^2-x^2-y^2}{2xy+2uz}.$$

Uit deze vergelijking volgt nu

$$1+Cos.\,A = \frac{u^2+2uz+z^2-(x^2+y^2-2xy)}{2(xy+uz)},$$
$$= \frac{(u+z)^2-(x-y)^2}{2(xy+uz)},$$
$$= \frac{(u+z-x+y)(u+z+x-y)}{2(xy+uz)},$$

of wat hetzelfde is

1+

$$1 + Cos.\,A = \frac{2(p-x)(p-y)}{xy+uz} \quad \ldots\ldots (1).$$

Op gelijke wijze vindt men

$$1 - Cos.\,A = \frac{2(p-u)(p-z)}{uz+xy} \quad \ldots\ldots (2),$$

Het product dezer vergelijkingen geeft

$$1 - Cos^2.\,A = Sin^2.\,A = \frac{4(p-u)(p-x)(p-y)(p-z)}{(uz+xy)^2},$$

en bij gevolg

$$\tfrac{1}{2}(uz+xy)\,Sin.\,A = \sqrt{(p-u)(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Maar

$$s = ABD + BCD = \tfrac{1}{2}uz\,Sin.\,A + \tfrac{1}{2}xy\,Sin.\,C$$
$$= \tfrac{1}{2}(uz+xy)\,Sin.\,A$$

zijnde, is

$$s = \sqrt{(p-u)(p-x)(p-y)(p-z)} \quad \ldots (3),$$

en omdat $$Tang.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{1-Cos.\,A}{1+Cos.\,A},$$

is, geven de vergelijkingen (1) en (2)

$$Tang.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-u)(p-z)}{(p-x)(p-y)}} \quad \ldots\ldots (4),$$

en op dezelfde wijze vindt men

$$Tang.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-u)(p-x)}{(p-y)(p-z)}} \quad \ldots\ldots (5).$$

De vergelijkingen (3), (4) en (5) geven nu de oplossing van het vraagstuk, wij stellen daartoe kortheidshalve

$$Tang.\tfrac{1}{2}A = a,$$
$$Tang.\tfrac{1}{2}B = b,$$
$$p-u = u', \quad p-x = y',$$
$$p-y = y' \text{ en } p-z = z',$$

dan worden de vergelijkingen (3), (4) en (5)

$$s = \sqrt{u'x'y'z'}, \quad a = \sqrt{\frac{u'z'}{x'y'}},$$

en

$$b = \sqrt{\frac{u'x'}{y'z'}}.$$

Uit dezelven volgt gemakkelijk

$$sa = u'z', \quad sb = u'x',$$

en $$ab = \frac{u'}{y},$$

dus $$x' = \frac{sb}{u'},\ y' = \frac{u'}{ab} \text{ en } z' = \frac{sa}{u'} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Overigens is blijkbaar

$$p - u + p - v + p - y + p - x = 2p,$$

of $$u' + x' + y' + z' = 2p,$$

dus $$u' + \frac{sb}{u'} + \frac{u'}{ab} + \frac{sa}{u'} = 2p,$$

of $$u'^2\left(1 + \frac{1}{ab}\right) - 2pu' = -s(a+b),$$

of ook $$u'^2(ab+1) - 2pabu' = -sab(a+b).$$

Uit deze tweede magtsvergelijking heeft men nu dadelijk u' en u, en vervolgens uit de vergelijkingen (6) de overige zijden.

CCXLV. VOORSTEL.

Door L. F BEAULIEU.

Een vierhoek in eenen cirkel beſchreven zijnde en om de vier driehoeken, waarin dezelve door de twee diagonalen verdeeld wordt, cirkels beſchreven zijnde, zoo begeert men als de middellijnen dezer cirkels gegeven zijn, de zijden, den inhoud en de diagonalen van den vierhoek, alsmede de middellijn van den omgeſchreven cirkel te berekenen?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. JONKHART *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat ABCD (*Fig.* 95) de gezochte vierhoek zijn, E het doorſnijdingspunt der diagonalen en d, d', d'' en d''' de bekende middellijnen der omgeſchrevene cirkels van de driehoeken AEB, BEC, CED en DEA, en ſtellen wij AB $= u$, BC $= x$, CD $= y$ en AD $= z$.

Uit het middelpunt O, van den omgeſchreven cirkel van den driehoek AEB, trekken wij OP loodregt op AB, dan is AB $=$ 2 AP $=$ 2 AO *Sin.* AOP $=$ 2 AO *Sin.* $\frac{1}{2}$ AOB $=$ 2 AO *Sin.* AEB $=$ 2 AO *Sin.* E, of

$$u = d\ Sin.\ E,$$

alsmede

$$x = d'\ Sin.\ E,\ y = d''\ Sin.\ E \text{ en } z = d'''\ Sin.\ E \quad . \quad (1).$$

Indien men dus $u+x+y+z=2p$,
en $d+d'+d''+d'''=2s$
ſtelt, dan heeft men
$$p=s\,Sin.\,E.$$
Door de formule (3) van het voorgaande voorſtel, zal men vinden
$$inh.\,ABCD=Sin^2.E\sqrt{(s-d)(s-d')(s-d'')(s-d''')};$$
doch nu is ook
$$inh.\,ABCD=\tfrac{1}{2}AC\times BD\,Sin.\,E,$$
terwijl uit de eigenſchap van de vierhoeken in den cirkel beſchreven alwaar $AC\times BD=AB\times CD+AD\times BC$ is, volgt
$$uy+xz=AC\times BD,$$
dus $$inh.\,ABCD=\tfrac{1}{2}(yu+xz)\,Sin.\,E,$$
of de waarden uit (1) in dezelve brengende
$$inh.\,ABCD=\tfrac{1}{2}(dd''+d'd''')\,Sin^2.E \quad (2).$$
De twee waarden voor den inhoud vergelijkende, komt er
$$\tfrac{1}{2}(dd''+d'd'')\,Sin.\,E=\sqrt{(s-d)(s-d')(s-d'')(s-d''')} \quad (3),$$
de waarde van $Sin.\,E$ uit deze vergelijking in de vergelijkingen (1) geſteld, geeft onmiddellijk voor de zijden des vierhoeks
$$u=\frac{2d}{dd''+d'd'''}\sqrt{(s-d)(s-d')(s-d'')(s-d''')},$$
$$x=\frac{2d'}{dd''+d'd'''}\sqrt{(s-d)(s-d')(s-d'')(s-d''')},$$
$$y=\frac{2d''}{dd''+d'd'''}\sqrt{(s-d)(s-d')(s-d'')(s-d''')},$$
$$\text{en } z=\frac{2d'''}{dd''+d'd'''}\sqrt{(s-d)(s-d')(s-d'')(s-d''')}.$$
Uit de vergelijkingen (2) en (3) heeft men ook
$$inh.\,ABCD=4\,\frac{\{(s-d)(s-d')(s-d'')(s-d''')\}^{\frac{1}{2}}}{(dd''+d'd''')^2}.$$
De waarde der diagonalen vindt men uit de eigenſchappen der vierhoeken, welke door de volgende formulen worden uitgedrukt
$$AC\times BD=AB\times CD+AD\times BC=yx+zz$$
$$=(dd''+d'd''')\,Sin^2.E,$$
en
$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\times AD+BC\times CD}{AB\times BC+AD\times CD}$$
$$=\frac{uz+xy}{ux+yz}=\frac{dd'''+d'd''}{dd'+d''d'''},$$

het product dezer vergelijkingen geeft

$$AC^2 = \frac{(dd'' + d'd'')(dd'' + d'd''')}{dd' + d''d'''} Sin^2. E$$

en hun quotient

$$BD^2 = \frac{(dd'' + d'd''')(dd' + d''d''')}{dd''' + d'd''} Sin^2. E \quad . \quad . \quad (4),$$

waarin men slechts uit (3) de waarde van *Sin.* E te stellen heeft.

Tot het bepalen van de middellijn v van den omgeschreven vierhoek heeft men, zoo als bekend is

$$2v\, inh. ABC = AB \times BC \times AC$$
$$= u\, x\, AC = AC . dd' Sin^2. E,$$
$$2v\, inh. ADC = AD \times CD \times AC$$
$$= y\, z \times AC = AC\, d''d''' Sin^2. E,$$

waaruit door optelling volgt

$$2v\, inh. ABCD = (dd' + d''d''')AC . Sin^2. E;$$

hierin voor *inh.* ABCD zijne waarde uit (2) en voor AC zijne waarde (4) substituerende, verkrijgt men na herleiding

$$v = \sqrt{\frac{(dd' + d''d''')(dd''' + d'd'')}{dd'' + d'd'''}}.$$

CCXLVI. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt eenen vierhoek, die in eenen cirkel kan beschreven worden, te berekenen, als gegeven zijn de vier loodlijnen uit het middelpunt van den cirkel op de vier zijden nedergelaten?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, K. C. COX, M. DE LEON, J. BASSAN *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat ABCD (*Fig.* 96) de gezochte vierhoek zijn, O het middelpunt van den omgeschreven cirkel, en de loodlijnen OM $= a$, ON $= b$, OP $= c$, en OQ $= d$; dewijl de punten M, N, P en Q in het midden der overeenkomstige zijden liggen, zoo volgt hieruit, dat in den vierhoek MNPQ de twee zijden PN en MQ beide evenwijdig aan de diagonaal BD zullen wezen, en elk gelijk aan de helft dezer laatste; dus MQ $=$ NP, even eens is MN $=$ PQ, dus

$$MO^2 + OQ^2 - 2\, MO \times OQ\, Cos. MOQ,$$
$$= ON^2 + OP^2 - 2\, ON \times OP\, Cos. NOP,$$

of

of $\quad a^2+d^2-2ad\,Cos.\,MOQ=b^2+c^2-2bc\,Cos.\,NOP.$
Dewijl nu in de vierhoeken AMOQ en CNOP de hoeken bij M, N, P en Q regt zijn, zoo heeft men *hoek* $MOQ=180°-A$ en *hoek* $NOP=180°-C=A$, dus verandert de voorgaande vergelijking in

$$a^2+d^2+2ad\,Cos.\,A=b^2+c^2-2bc\,Cos.\,A;$$

waaruit
$$Cos.\,A=\frac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2(bc+ad)}.$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$Cos.\,B=\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(cd+ab)}\quad\ldots\ldots\quad(1).$$

Stellende in deze formule $a+b+c+d=2s$, dan vindt men daaruit, even als in de oplossing van het Voorstel CCXLIV,

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{(s-a)(s-d)}};$$

en
$$Tang.\,\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{(s-a)(s-b)}},$$

waardoor nu de hoeken gevonden zijn. Tot het vinden der zijden, trekken wij OR en OS evenwijdig aan BC en AB, dan hebben wij

$$BM=\tfrac{1}{2}AB=BR+RM=OS+RM$$
$$=b\,Cosec.\,B+a\,Cot.\,B=(b+a\,Cos.\,B)\,Cosec.\,B,$$
$$BN=\tfrac{1}{2}BC=BS+SN=RO+SN$$
$$=a\,Cosec.\,B+b\,Cot.\,B=(a+b\,Cosec.\,B)\,Cosec.\,B.$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$DP=\tfrac{1}{2}CD=(d+c\,Cos.\,D)\,Cosec.\,D$$
$$=(d-c\,Cos.\,B)\,Cosec.\,B;$$
$$DQ=\tfrac{1}{2}DA=(c+d\,Cos.\,D)\,Cosec.\,D$$
$$=(c-d\,Cos.\,B)\,Cosec.\,B.$$

Tot het bepalen van den inhoud des vierhoeks in de gegevene heeft men blijkbaar

$$inh.\,ABCD=BM\times OM+BN\times ON$$
$$+DP\times OP+DQ\times OQ;$$

hierin de zoo even gevondene waarden stellende, zoo vindt men na behoorlijke herleiding

$$inh.\,ABCD=\frac{2(ab+cd)-(c^2+d^2-a^2-b^2)\,Cos.\,B}{Sin.\,B}.$$

Hier-

Hierin de waarde van *Sin.* B en *Cos.* B uit (1) ſtellende, komt er na herleiding

$$\text{inh. ABCD} = \sqrt{\{4(ab+cd)^2 - (c^2+d^2-a^2+b^2)^2\}},$$

en deze uitdrukking in factoren ontbindende, ſtellende $a+b+c+d=2s$, zoo vindt men

$$\text{inh. ABCD} = 4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

CCXLVII. VOORSTEL.

Door L. F. BRAULIEU.

Indien men uit het doorſnijdingspunt der diagonalen van eenen vierhoek in den cirkel beſchreven, loodlijnen op de vier zijden nederlaat, en de voeten dezer loodlijnen door regte lijnen vereenigt, dan ontſtaat er een vierhoek, waarin men uit het doorſnijdingspunt eenen cirkel zal kunnen beſchrijven. Men vraagt naar het bewijs?

OPGELOST *door* L. F. BRAULIEU, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* L. F. BRAULIEU.

Laat ABCD (*Fig.* 97) een ingeſchreven vierhoek zijn en MNPQ de vierhoek, volgens de bepalingen van het voorſtel gevormd.

Daar de hoeken AMR en AQR regt zijn, zoo is het klaar, dat eenen cirkel op AR als middellijn beſchreven door de punten M en Q zal gaan. Even eens zullen de punten P en Q op den omtrek van den cirkel, op RD als middellijn beſchreven, gelegen zijn; daaruit blijkt dan, dat

hoek MQR = *hoek* MAR = *hoek* BAC,
en *hoek* PQR = *hoek* PDR = *hoek* BDC,
maar ... *hoek* BDC = *hoek* BAC,
dus ... *hoek* MQR = *hoek* PQR.

Op gelijke wijze zal men aantoonen dat de lijnen MR, NR en PR de hoeken QMN, MNP en NPQ midden door deelen; indien men dus uit het doorſnijdingspunt R dezer lijnen, hetwelk ook het doorſnijdingspunt der diagonalen is, loodlijnen op de zijden des vierhoeks MNPQ nederlaat, dan zullen alle deze loodlijnen even groot wezen, en alzoo is R het middelpunt van eenen cirkel, die de vier zijden des vierhoeks MNRQ aanraakt.

CCXLVIII. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt eenen vierhoek, in eenen cirkel beſchreven kunnende worden, te berekenen, als gegeven zijn de vier loodlijnen uit het doorſnijdingspunt der diagonalen op de zijden neder gelaten?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat ABCD (*Fig.* 97) de gezochte vierhoek zijn, RM$=a$, RN$=b$, RP$=c$ en RQ$=d$ de gegevene loodlijnen; de zijden van den vierhoek MNPQ getrokken zijnde, heeft men

$$\begin{aligned} MQ^2 &= a^2+d^2-2\,a\,d\,Cos.\,MRQ \\ &= a^2+d^2+2\,a\,d\,Cos.\,A, \\ NP^2 &= b^2+c^2-2\,b\,c\,Cos.\,NRP \\ &= b^2+c^2-2\,b\,c\,Cos.\,A. \end{aligned}$$

In het voorgaande voorſtel is bewezen dat de loodlijnen uit het punt R op de zijden MN, NP, PR en RM nedergelaten, even groot zijn, dus

$$drieh.\,MRQ : drieh.\,NRP = MQ : NP,$$

maar $drieh.\,MRQ = \frac{1}{2}\,a\,d\,Sin.\,MRQ = \frac{1}{2}\,a\,d\,Sin\,A$,

en $drieh.\,NRP = \frac{1}{2}\,b\,c\,Sin.\,NRP = \frac{1}{2}\,b\,c\,Sin.\,A$,

dus $$a\,d : b\,c = MQ : NP,$$

of $$\frac{a\,d}{b\,c} = \frac{MQ}{NP}.$$

Men zal dan ook hebben

$$\frac{a^2\,d^2}{b^2\,c^2} = \frac{a^2+d^2+2\,a\,d\,Cos.\,A}{b^2+c^2-2\,b\,c\,Cos.\,A},$$

waaruit

$$Cos.\,A = \frac{(b^2+c^2)\,a^2\,d^2-(a^2+d^2)\,b^2\,c^2}{2\,a\,b\,c\,d\,(a\,d+b\,c)} \quad \ldots\ldots (1),$$

of wel, teller en noemer door $a^2\,b^2\,c^2\,d^2$ deelende; komt er

$$Cos\,A = \frac{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{d^2}}{2\left(\frac{1}{b\,c}+\frac{1}{a\,d}\right)}.$$

Stellende hierin $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=2s$, en de daaruit voortvloeijende waarde van *Cos.* A behandelende, zoo als in Voorſtel

ſtel CCXLIV met eene overeenkomſtige formule gedaan is, dan vindt men

$$Tang.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-\frac{1}{b})(s-\frac{1}{c})}{(s-\frac{1}{a})(s-\frac{1}{d})}} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Men zoude op dezelfde wijze vinden

$$Cos.B = \frac{(c^2+d^2)a^2b^2-(a^2+b^2)c^2d^2}{2abcd(ab+cd)} \quad . \quad . \quad (3),$$

en daaruit afleiden

$$Tang.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-\frac{1}{c})(s-\frac{1}{d})}{(s-\frac{1}{a})(s-\frac{1}{b})}} \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Om de zijden te bepalen zal men kunnen handelen zoo als in de oplosſing van Voorſtel CCXLVI is gedaan, en men zal dan vinden

$$AM = (d+a\,Cos.A)\,Cosec.A,$$
$$BM = (b+a\,Cos.B)\,Cosec.B,$$

dus $$AB = \frac{d+a\,Cos.A}{Sin.A} + \frac{b+a\,Cos.B}{Sin.B} \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Men kan echter eene meer eenvoudige waarde voor AB vinden; daartoe merke men op dat uit den aard van den vierhoek MNPQ, die om eenen cirkel kan beſchreven worden, MQ+NP=MN+PQ is, terwijl de driehoeken MRQ en MRN, NRP en PRQ alle dezelfde hoogte hebben, waaruit volgt, dat

$$drieh.MRQ + drieh.NRP = drieh.MRN + drieh.PRQ,$$

maar
$$drieh.MRQ = \tfrac{1}{2}ad\,Sin.A,$$
$$drieh.NRP = \tfrac{1}{2}bc\,Sin.A,$$
$$drieh.MRN = \tfrac{1}{2}ab\,Sin.B,$$

en
$$drieh.PRQ = \tfrac{1}{2}cd\,Sin.B,$$

dus
$$(ad+bc)\,Sin.A = (ab+cd)\,Sin.B,$$

de waarde van *Sin.* B uit deze laatſte vergelijking in (5) ſubſtituerende, vindt men na herleiding

$$AB = \frac{d(ad+bc)+b(ab+cd)+a(ad+bc)Cos.A+(ab+cd)Cos.B}{(ad+bc)\,Sin.A},$$

hier-

hierin nu voor *Cos.* A en *Cos.* B de waarden uit (1) en (2) gesteld, komt er

$$AB = \frac{a^2bd + ab^2c + bc^2d + acd^2}{c(ad+bc)\,Sin.\,A},$$
$$= \frac{ab(ad+bc) + cd(ad+bc)}{c(ad+bc)\,Sin.\,A},$$
$$= \frac{ab+cd}{c\,Sin.\,A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Door eene dergelijke berekening zou men de overige zijden kunnen bepalen, doch eene aandachtige beschouwing der figuur doet daartoe eenen korteren weg vinden, want men ziet gemakkelijk dat de driehoeken CRD, BAD en ABC respectivelijk gelijkvormig zijn met de driehoeken ARB, PRN en QRP, waaruit men dadelijk heeft

$$RM : RP = AB : CD,$$
of $$a : c = AB : CD,$$
dus $$CD = \frac{c}{a}AB = \frac{ab+cd}{a\,Sin.\,A},$$
$$RN : RP = AB : AD,$$
of $$b : c = AB : AD,$$
dus $$AD = AB\frac{c}{b} = \frac{ab+cd}{b\,Sin.\,A},$$
alsmede $$RQ : RP = AB : BC,$$
of $$d : c = AB : BC,$$
dus $$BC = AB\frac{c}{d} = \frac{ab+cd}{d\,Sin.\,A}.$$

CCXLIX. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Twee punten A *en* B *in het vlak van eenen gegevenen cirkel in stelling gegeven zijnde, vraagt men, op den omtrek des cirkels een punt* x *te vinden, zoodanig dat hoek* A x B *een maximum of een minimum zij?*

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Zij A en B (*Fig.* 98) de twee gegevene punten en O het middelpunt van den cirkel, waarvan de straal OM = R gegeven is; trekken wij uit O, OX loodregt op AB en OY evenwijdig

stel CCXLIV met eene overeenkomstige formule gedaan is, dan vindt men

$$Tang.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-\frac{1}{b})(s-\frac{1}{c})}{(s-\frac{1}{a})(s-\frac{1}{d})}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Men zoude op dezelfde wijze vinden

$$Cos.B = \frac{(c^2+d^2)a^2b^2-(a^2+b^2)c^2d^2}{2abcd(ab+cd)} \quad . \quad . \quad (3).$$

en daaruit afleiden

$$Tang.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-\frac{1}{c})(s-\frac{1}{d})}{(s-\frac{1}{a})(s-\frac{1}{b})}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Om de zijden te bepalen zal men kunnen handelen zoo als in de oplossing van Voorstel CCXLVI is gedaan, en men zal dan vinden

$$AM = (d+a\,Cos.A)\,Cosec.A,$$
$$BM = (b+a\,Cos.B)\,Cosec.B,$$
$$AB = \frac{d+a\,Cos.A}{Sin.A} + \frac{b+a\,Cos.B}{Sin.B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

dus

...en kan echter eene meer eenvoudige waarde voor AB vinden; ...rtoe merke men op dat uit den aard van den vierhoek MNPQ, ...om eenen cirkel kan beschreven worden, MQ+NP=MN ...Q is, terwijl de drie... ...RQ en MRN, NRP en PRQ ...dezelfde hoogte heb... ...t volgt, dat

drieh. MRQ+*drie*... ...*eh.* MRN+*drieh.* PRQ,

drie... ...*d Sin.* A,

drie... ...*c Sin.* A,

dri... ...*a b Sin.* B,

dr... ...*c d Sin.* B,

(*a d*+... ...*a b*+*c d*)*Sin.* B,

...arde van *Sin*... ...tste vergelijking in (5) substi...

...de, vindt n... ...$\frac{a(ad+bc)Cos.A+(ab+cd)Cos.B}{(ad+bc)Sin.A}$,

$= \frac{d(ad+}{}$ hier...

dus $\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{(p^2-2a^2)y' + aqx' - q(x'^2+y'^2)}{y'(p^2-2ax'-qy')^2}$. (4),

hetwelk gelijk nul gefteld, geeft tot de bepaling van het maximum of minimum

$$o = (p^2-2a^2)y' + aqx' + x'^2 + y'^2 \quad . \quad . \quad (5),$$

of $R^2 + aqx' = -(p^2-2a^2)\sqrt{(R^2-x'^2)}$,

en dus $(R^2+aqx')^2 = (p^2-2a^2)^2(R^2-x'^2)$,

waaruit men vindt

$$x' = \frac{aq^2R \mp (p^2-2a^2)\sqrt{(q^2(a^2-R^2)+(p^2-2a^2))}}{a^2q^2+(p^2-2a^2)^2}R,$$

$$= \frac{aq^2R \mp (p^2-2a^2)M}{a^2q^2+(p^2-2a^2)^2},$$

als mede

$$y' = \frac{qR(p^2-2a^2) \pm aq\sqrt{(q^2(a^2-R^2)+(p^2-2a^2)^2)}}{a^2q^2+(p^2-2a^2)^2}R,$$

$$= \frac{qR(p^2-2a^2) \pm aqM}{a^2q^2+(p^2-2a^2)^2},$$

zijnde hier de wortelgrootheid kortheidshalve door M voorgefteld.

Om nu te bepalen welk teeken van de wortelgrootheid aan het maximum of minimum beantwoordt, zoo differentieren wij de vergelijking (4) ten tweede male, en in aanmerking nemende dat de noemer een vierkant is, en dat door het in plaats ftellen der waarde van x' en y' het tweede gedeelte van de differentiaal van den teller $= o$ wordt, zoo hebben wij flechts het teeken te onderzoeken van

$$\frac{aqy' - (p^2-2a^2)x'}{y'^2(p^2-2ax'-qy')^2},$$

als men er de waarden van x' en y' in fubftitueerd; en daar nu hierdoor deze uitdrukking verandert in $\pm RM$, zoo blijkt hieruit, dat het bovenfte teeken van M het tweede differentiaal quotient pofitief maakt, en het onderfte teeken hetzelve negatief doet zijn, dus zal in de boven gevondene uitdrukkingen het bovenfte teeken het minimum en het onderfte teeken het maximum van den hoek ϕ doen kennen.

Constructie. De vergelijking (5) waarvan de verbinding met de vergelijking (1) van den gegevenen cirkel, de coördinaten der gezochte punten leert kennen, geeft eene zeer gemakkelijke con-

ſtructie van ons voorſtel aan de hand. Daar namelijk de vergelijking (5) klaarblijkelijk die van eenen cirkel is, zoo komt het er maar op aan, dezelve te conſtrueren, daar deze cirkel dan, door de ſnijdingen met den gegevenen cirkel de gevraagde punten zal doen kennen. Stelt men in de vergelijking (5) $y' = o$, dan vindt men $x' = o$ en $x' = a$, dus gaat de cirkel door (5) aangewezen door het middelpunt O van den gegevenen cirkel en door het punt P. Stelt men in dezelfde vergelijking $x' = a$, dan vindt men

$$y' = \frac{p^2 - 2a}{q} = -\frac{a^2 - R^2 - \beta\beta'}{\beta + \beta'} \quad \text{en} \quad y' = o;$$

de tweede waarde geeft weder het punt P, en de eerſte een punt E, in AB gelegen; om hetzelve te bepalen, nemen wij $PB' = PB = \beta$, en trekken door het punt A eene willekeurige lijn AD, die den gegevenen cirkel in twee punten C en D doorſnijdt; indien men dan door de punten C, D en B' eenen cirkel trekt, dan zal dezelve de lijn AB in het gezochte punt E ſnijden; want zoo men de raaklijn AM aan den gegevenen cirkel trekt, dan is klaarblijkelijk

$$AB' \times AE = AC \times AD = AM^2,$$
$$= AO^2 - MO^2 = AP^2 + OP^2 - MO^2,$$
$$= a^2 + \beta'^2 - R^2.$$

Maar nu is ook

$$AB' \times AE = AB'(AP + PE),$$
$$= (\beta + \beta')(\beta' + PE),$$

derhalve $(\beta + \beta')(\beta' + PE) = a^2 + \beta'^2 - R^2$,

of $$PE = \frac{a^2 - R^2 - \beta\beta'}{\beta + \beta'};$$

latende nu eindelijk door de punten O, P, E eenen cirkel gaan, dan zal deze den gevraagden cirkel in de twee gezochte punten x en x' ſnijden.

CCL. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt in eenen gegevenen driehoek eenen gelijkzijdigen driehoek zoodanig te beſchrijven, dat elk van denzelfs hoekpunten zich op een der zijden van den gegevenen driehoek bevinde, en dat denzelfs oppervlakte een minimum zij?

Op-

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU *en* J. JORRERT.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat ABC (*Fig.* 99) de gegevene en MNP de gezochte driehoek zijn, stellen wij BC $= a$, AC $= b$, AB $= c$, MN $=$ MP $=$ NP $= x$ en *hoek* NPC $= \phi$.

Uit de driehoeken BPM en CPN heeft men

$$BP = \frac{Sin.\ BMP}{Sin.\ B}\,MP = \frac{Sin.\,(60° - B + \phi)}{Sin.\ B}\,x,$$

$$PC = \frac{Sin.\ PNC}{Sin.\ C}\,NP = \frac{Sin.\,(C + \phi)}{Sin.\ C}\,x,$$

en daar BP $+$ PC $= a$ is, zoo is

$$\frac{Sin.\,(60° - B + \phi)}{Sin.\ B}\,x + \frac{Sin.\,(C + \phi)}{Sin.\ C}\,x = a,$$

waaruit

$$x = \frac{a\,Sin.\ B\,Sin.\ C}{Sin.\ C\,Sin.\,(60° - B + \phi) + Sin.\ B\,Sin.\,(C + \phi)},$$

$$= \frac{a\,Sin.\ B\ Sin.\ C}{z}.$$

Dewijl nu de inhoud van den driehoek evenredig is met het vierkant der zijde x, zoo zal voor een minimum van den inhoud ook x een minimum of de noemer de voorgaande breuk een maximum moeten zijn; en daar nu

$$z = Sin.\ C\ Sin.\,(60° - B + \phi) + Sin.\ B\ Sin.\,(C + \phi) \quad . \quad (1)$$

is, zoo heeft men

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = Sin.\ C\ Cos.\,(60° - B + \phi) + Sin.\ B\ Cos.\,(C + \phi) \quad . \quad (2).$$

Deze vergelijking ontwikkeld zijnde, geeft

$$\{Sin.\ B\ Cos.\ C + Sin.\ C\ Cos.\,(60° - B)\}\ Cos\ \phi - Sin.\ C \quad . \quad . \quad .$$

$$\{Sin.\ B + Sin.\,(60° - B)\}\ Sin.\ \phi = 0,$$

waaruit

$$Tang.\ \phi = \frac{Sin.\ B\ Cos.\ C + Sin.\ C\ Cos.\,(60° - B)}{Sin.\ C\,\{Sin.\ B + Sin.\,(60° - B)\}},$$

of, daar $Sin.\ B = \frac{b}{c}\,Sin.\ C$ en $Sin.\ B + Sin.\,(60° - B) = .\ .$ $Cos.\,(B - 30°)$ is,

$$Tang.\ \phi = \frac{b\,Cos.\ C + c\,Cos.\,(60° - B)}{c\,Cos.\,(B - 30°)} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

De

De ſubſtitutie van deze waarde van ϕ, in de vergelijking voor x, zal de zijde van den gezochten driehoek bepalen; doch men kan op eene gemakkelijkere wijze tot die waarde van x geraken. Tot dat einde ſtellen wij de vergelijkingen (1) en (2) kortheidshalve voor door

$$Sin.\,C\,Sin.\,\phi' + Sin.\,B\,Sin.\,\phi'' = z,$$
$$Sin.\,C\,Cos.\,\phi' + Sin.\,B\,Cos.\,\phi'' = o,$$

het vierkant dezer vergelijkingen bij elkander tellende, komt er, na behoorlijke herleiding

$$Sin^2.C + Sin^2.B + 2\,Sin.C\,Sin.B(Sin.\phi'\,Sin.\phi'' + Cos.\phi'\,Cos.\phi'') = z^2,$$

of
$$z^2 = Sin^2.C + Sin^2.B + 2\,Sin.C\,Sin.B\,Cos.(\phi'' - \phi'),$$
$$= Sin^2.C + Sin^2.B + 2\,Sin.C\,Sin.B\,Cos.\{C + \phi - (60° - B + \phi)\},$$
$$= Sin^2.C + Sin^2.B + 2\,Sin.C\,Sin.B\,Cos.(B + C - 60°),$$
$$= Sin^2.C + Sin^2.B + 2\,Sin.C\,Sin.B\,Cos.(120° - A),$$
$$= Sin^2.C + Sin^2.B - 2\,Sin.C\,Sin.B\,Cos\,(60° + A),$$
$$= Sin^2.C + \frac{b^2}{c^2}\,Sin^2.C - 2\frac{b}{c}\,Sin^2.C\,Cos.(60° + A),$$

en dus $z = \frac{Sin.C}{c}\sqrt{(b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,Cos.(60° + A))}$,

en bij gevolg

$$x = \frac{a\,c\,Sin\,B}{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,Cos.(60° + A))}} \quad \ldots (4).$$

Constructie. De waarden van *Tang.* ϕ en van x door de vergelijkingen (3) en (4) gegeven, kunnen zeer gemakkelijk geconſtrueerd worden. Op AB beſchrijven wij daartoe den gelijkzijdigen driehoek ABD, en CD getrokken hebbende, laten wij de loodlijnen AE, DQ op BC en DR op AE neder, dan hebben wij

$$CE = CA\,Cos.C = b\,Cos.C,$$
$$EQ = DR = AD\,Sin.DAR,$$
$$= AB\,Sin.(DAB + BAE) = c\,Sin.(60° + 90° - B),$$
$$= c\,Sin.(150° - B) = c\,Sin.(30° + B),$$
$$= c\,Cos.(60° - B),$$

dus $CQ = CE + EQ = b\,Cos.C + c\,Cos.(60 - B)$,

als mede $DQ = BD\,Sin.DBQ = AB\,Sin.DBC$,
$$= c\,Sin.(60° + B) = c\,Cos.(30° - B),$$
$$= c\,Cos.(B - 30°).$$

De

De waarden van CQ en DQ met die van *Tang.* ϕ vergelijkende, komt er

$$Tang.\,\phi = \frac{CQ}{DQ} = Tang.\,CDQ,$$

dus

$$\phi = CDQ.$$

Hieruit volgt dadelijk dat de zijde NP van den gezochten driehoek loodregt op CD moet zijn. Het komt er dus nog maar op aan, de lengte van de zijde x te bepalen. De vergelijking (4) gebruikende, ziet men eerst dat $ac\,Sin\,B = 2inh.ABC = AE \times BC$, en daar hoek $DAC = 60^\circ + A$ is, zoo heeft men uit den driehoek DAC

$$DC^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,Cos.(60^\circ + A),$$

zoodat klaarblijkelijk

$$x = \frac{AE \times BC}{DC}.$$

Men zal alzoo $x = NP$ vinden door eene vierde evenredige te zoeken aan de lijnen DC, AE en BC, en dewijl nu NP loodregt op CD moet zijn, kan men den driehoek MNP het eenvoudigst op de volgende wijze conſtrueren: tuſſchen de zijden AC en BC trekke men naar willekeur eene lijn $N'P'$ loodregt op CD, en na op $N'P'$ den gelijkzijdigen driehoek $M'N'P'$ te hebben beſchreven, trekke men door de punten C en M' eene lijn, welke AB in een punt M zal doorſnijden; verder trekke men door dit punt de lijnen MN en MP evenwijdig aan $M'N'$, $M'P'$, dan is MNP de gevraagde driehoek; want uit de conſtructie volgt $CN : CN' = CM : CM' = CP : CP'$, alzoo is NP evenwijdig aan $N'P'$ en derhalve loodregt op CD, terwijl de driehoek MNP gelijkvormig is met den driehoek $M'N'P'$ en dus gelijkzijdig.

DRUK.

DRUKFOUTEN EN VERBETERINGEN

TOT DIT DEEL,

DOOR DE LEDEN DES GENOOTSCHAPS NADER OPGEGEVEN.

VOORSTEL XXXIX. *Bladz.* 45.

Uit de voorlaatſte waarde van $2mn - n^2 - 1$ *volgt:*

$$2mn - n^2 - 1 = \frac{Cos.c - 1}{2\,Sin^2.\frac{1}{2}b\,Cos^2.\frac{1}{2}a} = -\frac{Sin^2.\frac{1}{2}c}{Sin^2.\frac{1}{2}b\,Cos^2.\frac{1}{2}a},$$

Verder leze men in den teller der waarde van $Cos^2.\psi$ *voor* $+1$, -1; *hierdoor vindt men*

$$z^2 = \frac{16\,Sin^2.\frac{1}{2}a\,Sin^2.\frac{1}{2}b\,Sin^2.\frac{1}{2}c}{1 - Cos^2.a - Cos^2.b - Cos^2.c + 2\,Cos.a\,Cos.b\,Cos.c},$$

De noemer dezer uitdrukking door p voorſtellende, zoo volgt uit de waarde van $m^2 - 1$

$$p = Sin^2.a\,Sin^2.b - (Cos.c - Cos.a\,Cos.b)^2,$$
$$= (Sin.a\,Sin.b + Cos.c - Cos.a\,Cos.b)(Sin.a\,Sin.b - Cos.c + Cos.a\,Cos.b)$$
$$= (Cos.c - Cos.(a+b))\,(Cos.(a-b) - Cos.c),$$
$$= 4\,Sin.\frac{a+b+c}{2}\,Sin.\frac{a+b-c}{2}\,Sin.\frac{a+c-b}{2}\,Sin.\frac{b+c-a}{2},$$

en dus.

$$z = \frac{2\,Sin.\frac{1}{2}a\,Sin.\frac{1}{2}b\,Sin.\frac{1}{2}c}{\sqrt{\{Sin.\frac{1}{2}(a+b+c)\,Sin.\frac{1}{2}(a+b-c)\,Sin.\frac{1}{2}(a+c-b)\,Sin.\frac{1}{2}(b+c-a)\}}}.$$

VOORSTEL XL. *Bladz.* 46.

In het tweede lid der vergelijking (1) *ſtaat* $\frac{1}{2}b$ *voor* $\frac{1}{2}s$.

In het eerſte lid der vergelijking (2) *ſtaat* $Sin.\,x\;Sin.\,y$ *in plaats van* $Sin^2.x\;Sin^2.y$; *hierdoor vindt men:*

$Sin^2.a\,Sin^2.x\,Sin^2.y = 4\,Sin.\frac{1}{2}s\,Sin.(\frac{1}{2}s - x)\,Sin.(\frac{1}{2}s - y)\,Sin.(\frac{1}{2}s - z)\,..\,(2^d)$,

en alzoo uit de bekende formulen

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}a = \frac{Sin.(\frac{1}{2}s - x)\;Sin.(\frac{1}{2}s - y)}{Sin.x\;Sin.y},$$

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}a = \frac{Sin\;\frac{1}{2}s\;Sin.(\frac{1}{2}s - z)}{Sin.x\;Sin.y},$$

en

en $4 Sin^2.\frac{1}{2}a\, Cos^2.\frac{1}{2}a = Sin^2.a$,

$$Cot^2.\tfrac{1}{2}a = \frac{Sin.\frac{1}{2}s\, Sin.(\frac{1}{2}s-z)}{Sin.(\frac{1}{2}s-x)\, Sin.(\frac{1}{2}s-y)} \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

De vergelijkingen (1) en (*a*) met elkander vermenigvuldigende, vindt men

$$Tang^2.\tfrac{1}{2}a\, Cot^2.\tfrac{1}{2}a = Sin^2.(\tfrac{1}{2}s-z),$$

of $$Tang.\tfrac{1}{2}a\, Cot.\tfrac{1}{2}a = Sin.(\tfrac{1}{2}s-z) \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Uit de verbinding der vergelijking (1) met (2^a) volgt verder

$$Sin^2.a\, Sin^2.x\, Sin^2.y = 4\, Tang^2.\tfrac{1}{2}a\, Sin^2.\tfrac{1}{2}s,$$

of $$Sin.x\, Sin.y = 2\, Tang.\tfrac{1}{2}a\, \frac{Sin.\frac{1}{2}s}{Sin.a},$$

of nog $$\tfrac{1}{2}Cos.(x-y)-\tfrac{1}{2}Cos.(x+y) = 2\, Tang.\tfrac{1}{2}a\, \frac{Sin.\frac{1}{2}s}{Sin.a},$$

en dus $$Cos.(x-y) = Cos.(x+y)+4\, Tang.\tfrac{1}{2}a\, \frac{Sin.\frac{1}{2}s}{Sin.a} \quad . \quad (c).$$

Uit de vergelijking (*b*) zal men *z* kunnen berekenen, waardoor dan ook $x+y$ bekend wordt, en dewijl de vergelijking (*c*) $x-y$ geeft, zoo zal de geheele driehoek bepaald zijn.

VOORSTEL LXIV. *Bladz.* 75.

Aan het einde der oplosſing ſtaat voor de eerſte der gevraagde cijfers 19, *moet zijn* 20, *en voor het vierde* L, *moet zijn* M.

VOORSTEL LXV. *Bladz.* 76.

In de beide laatſte regels der oplosſing moet ſtaan: $x=58$, $y=21$, *en de reeks* 58, 86, 144 en 142.

VOORSTEL LXXV. *Bladz.* 94.

Voor de tien laatſte regels dezer oplosſing moet het volgende in de plaats geſteld worden:

Indien het gedachte getal 10 was, dan waren $a=1$, $b=0$ en $c=3$, en wij vinden

$$x = 105\, m+70+45.$$

Stelt men $m=0$ dan vindt men 115, hetwelk aan de geſtelde voorwaarde voldoet, doch het getal 10 niet oplevert. Neemt men $m=1$, zoo vindt men 220 ook aan de voorwaarde voldoende, zonder aan de vraag te voldoen. Neemt men $m=-1$, dan vindt men het gedachte getal 10. Men kan hieruit afleiden, dat men in plaats van het gedachte getal, ſlechts een veelvoud van $3\times5\times7$, plus het gedachte getal door de opgegevene voorwaarden vinden kan.

VOOR-

VOORSTEL LXXX. *Bladz.* 97.

Het nummeren der letters van het Alphabet voor het woord in dit voorstel bedoeld moet met 0, 1, 2 *enz. gedaan worden.*

VOORSTEL CXII. *Bladz.* 144.

Voor de vijf laatste regels der oplossing van dit voorstel leze men:

$$y = 2,$$

dus $x = 3\frac{1}{2}$,

alzoo $x + 1 = 4\frac{1}{2}$,

$x - 1 = 2\frac{1}{2}$,

en $2y = 4$.

VOORSTEL CXIV. *Bladz.* 146.

Voor den laatsten regel dezer oplossing leze men:

$$\Phi = 25° 7'.$$

De zons-declinatie door ψ voorstellende, zoo is

$$Sin.\,\psi = \frac{mW}{ZW},$$

$$= \frac{SW\ Cos.\,\Phi}{SW\ Cosec.\,\Phi},$$

$$= \frac{1}{2}\,Sin.\,2\Phi,$$

waaruit volgt $\psi = 22° 36'$.

VOORSTEL CXXXV. *Bladz.* 170.

Men leze in den derden regel 30375 *voor* 20375, *en voor de reeks*

30375, 60750, 121500, 243000,
486000, 972000, 1944000 en 3888000.

VOORSTEL CXXXVIII. *Bladz.* 172.

In de oplossing van dit voorstel leze men:

$$\frac{u}{z} = \frac{5}{4} \text{ of } z = \frac{4}{5}u,$$

$$\frac{u}{y} = \frac{5}{3} \text{ of } y = \frac{3}{5}u,$$

als mede in den laatsten regel $y = 3$ en $z = 4$.

VO
C
N
B
D
C
A

DRUKFOUTEN EN VERBETERINGEN

TOT DIT DEEL,

DOOR DE LEDEN DES GENOOTSCHAPS NADER OPGEGEVEN.

VOORSTEL XXXIX. *Bladz.* 45.

Uit de voorlaatste waarde van $2mn - n^2 - 1$ *volgt:*

$$2mn - n^2 - 1 = \frac{Cos.c - 1}{2\,Sin^2.\frac{1}{2}b\,Cos^2.\frac{1}{2}a} = -\frac{Sin^2.\frac{1}{2}c}{Sin^2.\frac{1}{2}b\,Cos^2.\frac{1}{2}a},$$

Verder leze men in den teller der waarde van $Cos^2.\psi$ *voor* $+1$, -1; *hierdoor vindt men*

$$z^2 = \frac{16\,Sin^2.\frac{1}{2}a\,Sin^2.\frac{1}{2}b\,Sin^2.\frac{1}{2}c}{1 - Cos^2.a - Cos^2.b - Cos^2.c + 2\,Cos.a\,Cos.b\,Cos.c},$$

De noemer dezer uitdrukking door p voorstellende, zoo volgt uit de waarde van $m^2 - 1$

$$p = Sin^2.a\,Sin^2.b - (Cos.c - Cos.a\,Cos.b)^2,$$
$$= (Sin.a\,Sin.b + Cos.c - Cos.a\,Cos.b)(Sin.a\,Sin.b - Cos.c + Cos.a\,Cos.b)$$
$$= (Cos.c - Cos.(a+b))\,(Cos.(a-b) - Cos.c),$$
$$= 4\,Sin.\frac{a+b+c}{2}\,Sin.\frac{a+b-c}{2}\,Sin.\frac{a+c-b}{2}\,Sin.\frac{b+c-a}{2},$$

en dus

$$z = \frac{2\,Sin.\frac{1}{2}a\,Sin.\frac{1}{2}b\,Sin.\frac{1}{2}c}{\sqrt{\{Sin.\frac{1}{2}(a+b+c)\,Sin.\frac{1}{2}(a+b-c)\,Sin.\frac{1}{2}(a+c-b)\,Sin.\frac{1}{2}(b+c-a)\}}}.$$

VOORSTEL XL. *Bladz.* 46.

In het tweede lid der vergelijking (1) *staat* $\frac{1}{2}b$ *voor* $\frac{1}{2}s$.

In het eerste lid der vergelijking (2) *staat Sin. x Sin. y in plaats van* $Sin^2.x\,Sin^2.y$; *hierdoor vindt men:*

$Sin^2.a\,Sin^2.x\,Sin^2.y = 4\,Sin.\frac{1}{2}s\,Sin.(\frac{1}{2}s - x)\,Sin.(\frac{1}{2}s - y)\,Sin.(\frac{1}{2}s - z)\,..(2^a)$,

en alzoo uit de bekende formulen

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}a = \frac{Sin.(\frac{1}{2}s - x)\,Sin.(\frac{1}{2}s - y)}{Sin.x\,Sin.y},$$

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}a = \frac{Sin.\frac{1}{2}s\,Sin.(\frac{1}{2}s - z)}{Sin.x\,Sin.y},$$

en

en $4\,Sin^2.\frac{1}{2}a\,Cos^2.\frac{1}{2}a = Sin^2.a$,

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}a = \frac{Sin.\tfrac{1}{2}s\,Sin.(\tfrac{1}{2}s-z)}{Sin.(\tfrac{1}{2}s-x)\,Sin.(\tfrac{1}{2}s-y)} \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

De vergelijkingen (1) en (a) met elkander vermenigvuldigende, vindt men

$$Tang^2.\tfrac{1}{2}a\,Cot^2.\tfrac{1}{2}a = Sin^2.(\tfrac{1}{2}s-z),$$

of $$Tang.\tfrac{1}{2}a\,Cot.\tfrac{1}{2}a = Sin.(\tfrac{1}{2}s-z) \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Uit de verbinding der vergelijking (1) met (2^a) volgt verder

$$Sin^2.a\,Sin^2.x\,Sin^2.y = 4\,Tang^2.\tfrac{1}{2}a\,Sin^2.\tfrac{1}{2}s,$$

of $$Sin.x\,Sin.y = 2\,Tang.\tfrac{1}{2}a\,\frac{Sin.\tfrac{1}{2}s}{Sin.a},$$

of nog $$\tfrac{1}{2}Cos.(x-y)-\tfrac{1}{2}Cos.(x+y) = 2\,Tang.\tfrac{1}{2}a\,\frac{Sin.\tfrac{1}{2}s}{Sin.a},$$

en dus $$Cos.(x-y) = Cos.(x+y)+4\,Tang.\tfrac{1}{2}a\,\frac{Sin.\tfrac{1}{2}s}{Sin.a} \quad . \quad (c).$$

Uit de vergelijking (*b*) zal men z kunnen berekenen, waardoor dan ook $x+y$ bekend wordt, en dewijl de vergelijking (*c*) $x-y$ geeft, zoo zal de gehoele driehoek bepaald zijn.

VOORSTEL LXIV. *Bladz.* 75.

Aan het einde der oplosfing staat voor de eerste der gevraagde cijfers 19, *moet zijn* 20, *en voor het vierde* L, *moet zijn* M.

VOORSTEL LXV. *Bladz.* 76.

In de beide laatste regels der oplosfing moet staan: $x = 58$, $y = 21$, *en de reeks* 58, 86, 144 en 142.

VOORSTEL LXXV. *Bladz.* 94.

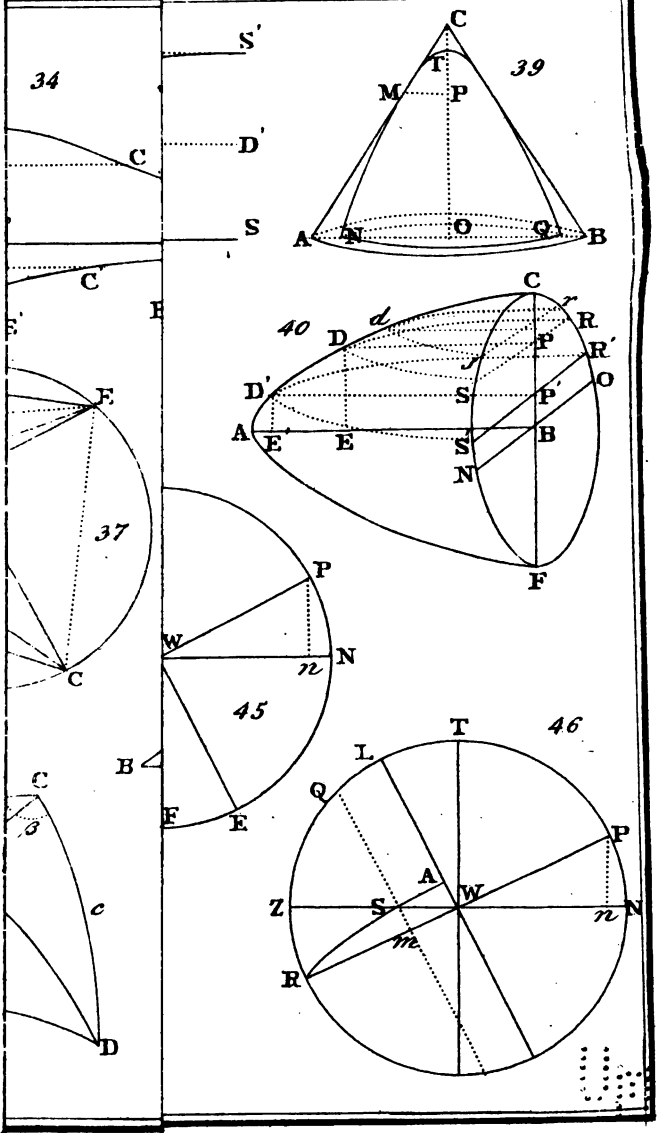
Voor de tien laatste regels dezer oplosfing moet het volgende in de plaats gesteld worden:

Indien het gedachte getal 10 was, dan waren $a = 1$, $b = 0$ en $c = 3$, en wij vinden

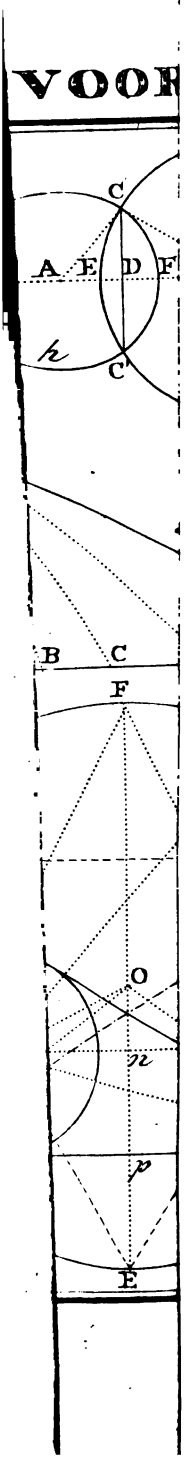
$$x = 105\,m+70+45.$$

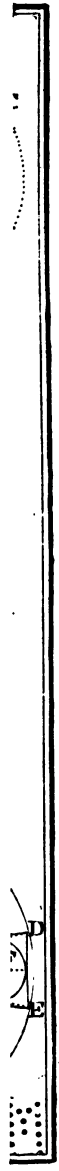
Stelt men $m = 0$ dan vindt men 115, hetwelk aan de gestelde voorwaarde voldoet, doch het getal 10 niet oplevert. Neemt men $m = 1$, zoo vindt men 220 ook aan de voorwaarde voldoende, zonder aan de vraag te voldoen. Neemt men $m = -1$, dan vindt men het gedachte getal 10. Men kan hieruit afleiden, dat men in plaats van het gedachte getal, slechts een veelvoud van $3\times5\times7$, plus het gedachte getal door de opgegevene voorwaarden vinden kan.

VOOR-

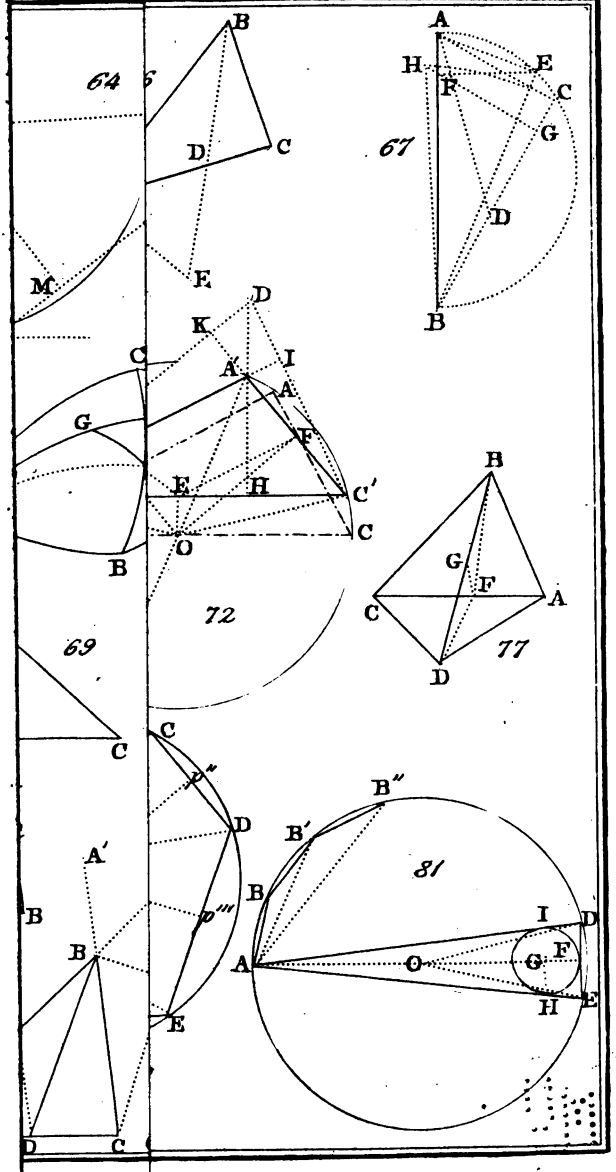

34
S'
D'
S
C
C'
E'
E
F
37
C
39
C
T
M
P
A
N
O
Q
B
40
C
r
d
D
R
P
R'
D'
S
P'
O
A
E
E
S
B
N
F
P
W
N
n
45
B
F
E
C
3
c
D
46
T
L
Q
P
A
W
Z
S
n
N
m
R

VOOR

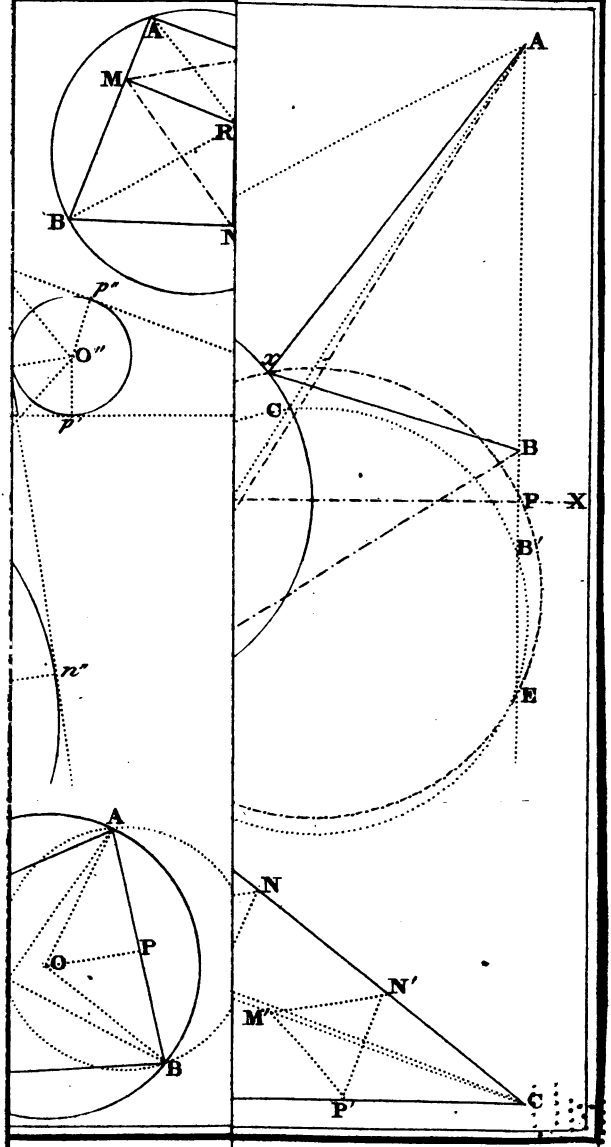


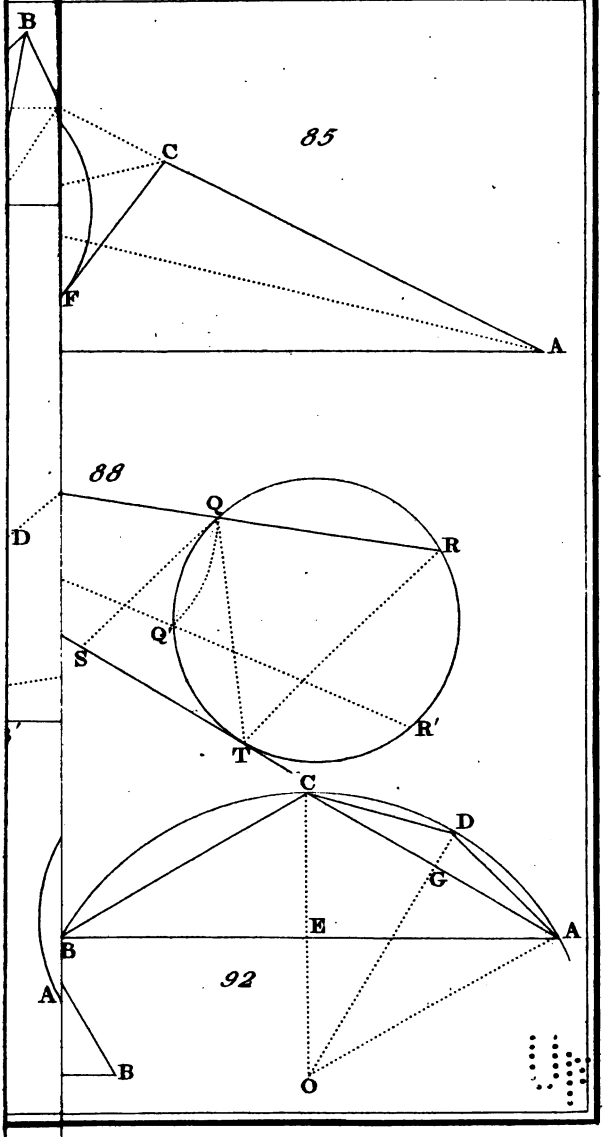


Pl. V.



Pl. VII.




B
C
85
F
A
88
Q
D
R
Q'
S
R'
T
C
D
G
E
A
B
92
A
B
O

For Room Use Only

A 56998 0

UNIVERSITY OF MICHIGAN

3 9015 06522 41